走向科学的明天丛书

ZOUXIANG KEXUE DE MINGTIAN CONGSHU

平面几何定理的机器证明

PINGMIAN JIHE DINGLI DE JIQIZHENGMING



孙熙椿 著



广西教育出版社



走向科学的明天丛书

ZOUXIANG KEXUE DE MINGTIAN CONGSHU

总策划 黄力平
何 醒

责任编辑 廖民锂
封面设计 苏鸣生
图片版式 吴左平
责任校对 罗 健 温泉源

ISBN 7-5435-2980-7



9 787543 529809 >

ISBN 7-5435-2980-7/G · 2264 定价:9.50元



国家“九五”重点图书
出版规划项目

走向科学的明天丛书

平面几何定理的机器证明

孙熙椿 著

广西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面几何定理的机器证明/孙熙椿著.—南宁:广西教育出版社,2000.4
(走向科学的明天丛书)
ISBN 7-5435-2980-7

Ⅰ.平... Ⅱ.孙... Ⅲ.平面几何-定理证明:机器证明-普及读物 Ⅳ.0123.1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第19550号

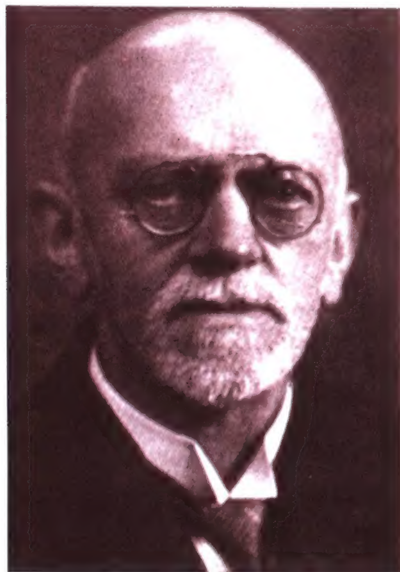
走向科学的明天丛书
平面几何定理的机器证明
孙熙椿 著
☆
广西教育出版社出版
南宁市鲤湾路8号
邮政编码:530022 电话:5850219
本社网址 http://www.gep.com.cn
读者电子信箱 master@gep.com.cn
全国新华书店经销 广西民族印刷厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 4.875印张 插页4 99千字
1999年12月第1版 2000年9月第3次印刷
印数:9 001—14 000册
ISBN 7-5435-2980-7/G·2264 定价:9.50元



彩图 1　欧几里得（Euclid，活动于约公元前 300 年）。古希腊数学家，以其所著的《几何原本》闻名于世



彩图 2　笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）。法国哲学家、数学家、物理学家、解析几何学奠基人之一



彩图 3　希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943）。德国数学家



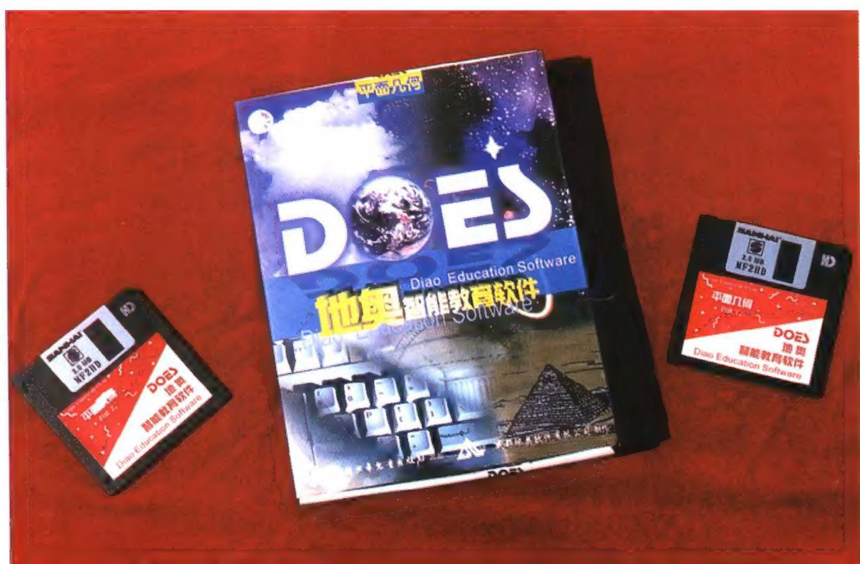
彩图4　吴文俊(1919 —　)。中国数学家，中国科学院院士。20世纪70年代后期致力于数学机械化与机械化的数学的研究，创立了利用机器证明与发现几何定理的新方法，在国际上被誉为“吴方法”



彩图5　吴文俊院士在《中国科学》上发表的第一篇关于几何定理的机器证明的论文及其部分著作



彩图6 张景中（1936 — ）。中国数学家、计算机科学家、中国科学院院士。与合作者创立了计算机生成几何定理和可读性证明的原理与算法，在国际上取得了公认的领先地位。图中为张景中院士在中国台湾省讲数学定理的机器证明



彩图7 张景中院士等研制的平面几何定理的机器证明的软件



彩图 8　本书作者在对几何定理的机器证明试验班学生作报告



彩图 9　由本书作者和李盛光负责的几何定理的机器证明课题组成员在研究下一步工作

序

在世纪之交，我们这套《走向科学的明天丛书》问世了。这是一套面向青少年朋友的大型科普读物，是为了补充学校教育之不足，从数学、物理学、化学、天文学、地球科学和生命科学六大基础科学的历史发展、当前的成就、未来的璀璨远景，分类展示给读者。

本世纪末，有一股反科学的逆流，认为科学的时代已经过去。例如美国的约翰·霍根，他写了一本书《科学的终结》，他说："科学（尤其是纯科学）已经终结，伟大而又激动人心的科学发现时代已一去不复返了！"与此同时，法国当代女巫伊丽莎白·泰西埃也写了一本畅销书《占星术——21世纪的科学》，再加上那些"世纪末"的谣言和形形色色的邪教，把社会搅得似乎有点混乱。

然而，科学永远是照亮世界的火炬，光芒所至，一切邪魔歪道都会原形毕露。这套《走向科学的明天丛书》也正是告诉大家，21世纪的科学非但不会终结，还将会有更大的发展。

为什么《走向科学的明天丛书》还是从数、理、化、天、地、生这老的六大基础科学讲起？因为我们不能割断人类认识客

观世界的历史，这是人类认识绝对真理的长河中的一个非常重要的环节，近代科学和未来的科学都是在这个基础上发展起来的，边缘科学、前沿科学……我们都在科学的明天中讲到了。有人不顾客观的科学发展的历史事实，主观地想把科学体系打乱，从而建立个人的"新科学体系"，这样只能把科学搞乱，给伪科学以钻空子的机会。

在80年代初期，科普界曾有过一场争论，那就是有人说知识的科普已经过时，科普的任务是普及科学思想和科学方法，而这个任务将由科学文艺(主要是科幻小说)来完成。我们说科学基础知识与科学思想和科学方法是刀与刃的关系，抛弃科学基础知识，科学思想和科学方法就成了无刀之刃，只是幻想与空话。科学基础知识越深厚，科学之剑也就越坚实，砥砺出来的剑刃也就无坚不摧。我们推出这套《走向科学的明天丛书》，也就是想让每一位读者都能得到这柄坚实的剑，而砥砺剑刃则需要读者们自己的努力了。

这套丛书的编写是在一批老科普作家支持下集体完成的，他们多年来在教育和科研第一线工作，如今大多已年近花甲或年过花甲，但为了科普事业的发展，他们仍然在百忙之中创作了这批精彩的科普作品，我们应该向他们表示衷心感谢。

最后，要特别感谢广西教育出版社，正是在编辑们的精心设计和组织下，这套《走向科学的明天丛书》才能与读者早日见面。

郭正谊

1999年8月20日

致青少年朋友

无论哪个国家，数学和本国语文都是学生的主课。这两科构成了人们最基本的文化素养。数学，则是最具国际性的学科。到20世纪中叶，世界各国的数学课程大体上是相同的。算术、几何、代数、三角成为人类基础教育的主题。这一切，古希腊的学者都已完成了，埃及、巴比伦、印度、阿拉伯和古代中国的数学家也都有特定的贡献。因此，现在的中小学数学内容，是人类的共同财富。

17世纪牛顿和莱布尼兹发明微积分，20世纪冯·诺依曼等发明了计算机，使得数学文明发生了巨大的变化。数学，以更新的面貌推动着社会前进。20世纪的数学发展，抵得上过去的几百年。现在的标准数学学科分类，有96门大学科，几百门小学科。现在世界上已经找不到能够通晓整个数学的数学家了。

一方面是中小学数学内容相对不变，另一方面是现代数学内容飞速发展。这二者间如何协调？除了加强中小学数学教育改革之外，对公众进行数学普及是一件大事。在“科教兴国”的今天，没有数学的普及是不可想像的。

2000年，被国际数学家联合会确定为数学年，目的是让公众了解数学。

广西教育出版社出版《走向科学的明天丛书》，其中包括的数学学科一套共6册。数学学科的内容是如此广泛，一套科普丛书是不可能介绍完全的。我们只选择一些重要的、比较熟悉的部分向读者做一些力所能及的介绍，希望本丛书能帮助读者对当代数学及其前景作一管窥。

数学全套书由以下6册组成：

1.《数学的明天》，这是我个人对现代数学的一些感受，主要由一些新闻和故事组成，期望从整体上看看数学。

2.《集合与面积》，这是一本涉及无限的书，是现代数学的精华部分，我们做了简单的描述。主要作者是李惠玲和金家樑。苏明剑、刘珊、吴作章写了一些初稿。

3.《精益求精的最优化》，反映了人类期望用数学方法求得精确控制经济、管理、军事以及生产过程的愿望。李惠玲是主要作者。参加写作的有施洪亮、刘开峰和刘玲。

4.《大千世界的随机现象》，主要介绍概率和数理统计的简单内容。当"降水概率"在电视屏幕上出现时，高中毕业生却全然没有在课堂上听说过"概率"，这是数学教育的悲哀。对这本书，我花了一些力气，刘萍作了一些整理工作。初稿由张东鸿、李雪峰、何君等完成。

5.《组合数学方兴未艾》，对未来会有重大发展的一门学科做了介绍。计算机是"离散"的，数据是离散的。"组合"爆炸是一个现实问题。书中谈了许多中国古代数学家的贡献。此书由王春萍、张建国写初稿。

6.《平面几何定理的机器证明》，是一本介绍当代中国数学家成就的普及性书籍。由江西师范大学孙熙椿教授撰写，

预想会受到读者的关注。

这套书是1998年动手写的。我拟订了提纲。开始时由华东师范大学数学系一批研究生写初稿，开过几次会。有些同学很用心，写得不错。不过毕竟第一次写作，需要改动之处甚多，有许多则完全是另起炉灶。我在匆忙中找李惠玲教授帮忙。她费了许多工夫。

由于匆忙，参与的人多，错误之处在所难免，对此心中十分忐忑，诚恳地希望读者原谅。

数学不像有些人宣传的那样，存在“数学危机”。数学在一日千里地前进。祝愿中国数学繁荣发展，尽早实现“21世纪数学大国”梦想。

张奠宙

1999年12月

写在前面的话

1977年，我国著名数学家吴文俊院士的学术论文“初等几何判定问题与机械化证明”在《中国科学》(1977年第6期)上正式发表，文中提出了几何定理的机器证明的新方法，从而掀开了数学定理的机器证明这一研究领域的新的一页。他首次在计算机上证明了一大批很不简单的初等几何定理，从而开创了从公理化到机械化的一条新路。吴文俊创立的几何定理的机器证明的方法在国际上被誉为吴方法，吴方法的影响是世界性的，在吴方法的影响下，美国等十几个国家的科学家相继发表了数以百计的学术论文。吴方法不仅实现了一大批初等几何定理的机器证明，更重要的是吴文俊院士为其方法提供了严密的数学理论基础，从而为数学定理的机器证明在数学界争得一席之地。现在可以毫不含糊地说：数学可分为公理化数学与机械化数学，如果说20世纪的数学是公理化数学，那么可以预见，在21世纪机械化数学将占主导地位。

1992年，张景中院士应邀赴美国访问，他利用自己所创立的消点算法与周咸青、高小山等合作，在Windows系统下，成功地研制出具有可读性的几何定理自动生成的机器证明软件，使人们期待了近三十年的可读性证明第一次在计算机上实现了，计算机不仅能自动生成并显示出与在纸上用笔算的

步骤相一致的算式,而且能以动态作图形式,将图形在屏幕上画出来。

1986年洪加威在《中国科学》上发表论文指出:对于一类平面几何定理,按照一个简单的规则去举例子,并且对具体的数值例子的计算到一定的精确程度,就完全可以用来精确地判定一个一般的几何问题,这就是例证法。由于洪加威方法的复杂性,至今未能在计算机上实现。

几乎同时,张景中院士和杨路教授提出了数值并行法,首次在计算机上实现了用举例子的方法证明几何定理。用举例来证明数学定理,在数学界一直是很忌讳的事情。用举例来证明几何定理,这不仅在数学上是漂亮的,而且对其哲学基础也引起了很大的震动。

近几年,杨路教授在几何不等式的机器证明方面也取得了突破性的进展。可以说,初等几何定理的机器证明的问题几乎都是由中国数学家解决的。

面对中国数学家所取得的巨大的成就,著名计算机专家、美籍华人王浩教授认为"要使每个中国数学教师都懂得吴方法",张奠宙教授不久前也指出:数学定理的机器证明方法的书是"中国数学教师当读的"。作者就是在张奠宙教授的邀请和鼓励下撰写这本书的,希望能引起读者的兴趣。

在张景中院士的指导下,我们正与临川二中特级教师李盛光合作,在该校一个班进行让中学生自己动手在计算机上证明平面几何定理的实验。通过实验,我们希望能为我国平面几何的教学改革找到一个突破口,这就是"机械化",以求对平面几何难学这一世界性难题进行一次探索。只要我们坚持实验和研究,相信中学数学机械化一定会在我国首先实现。我更相信,经过几代人,甚至更长时间的努力,将来学习平面几何

会像玩游戏机那样容易，那样有趣！

在本书编写过程中得到了广西教育出版社的支持和帮助，在此表示感谢。由于本人水平有限，难免会有疏漏，望读者指正。

孙熙椿

1999年12月于南昌

目录

欧几里得的《几何原本》

欧几里得(活动于约公元前 300 年)的《几何原本》一书,是世界上流传最广、再版次数最多的科技书籍。仅从 1482 年到 19 世纪末,《几何原本》已用各种文字出版了 1000 次以上。历史上还没有哪一本科技书籍对人类的影响超过它,直到今天它仍然占据着中学课堂。欧几里得的名字在 20 世纪以前一直是几何学的同义词。为什么欧几里得几何会有如此魅力?主要是它在科学上,特别是教育上的出色成就。首先,欧几里得将前人积累的几何成果总结成从少数几个原始概念及公认的命题(公理)出发,用逻辑推理的方法,演绎成具有较为完整科学体系的几何学,开创了公理化数学

的先河，这在人类科学史上是一个伟大的创举。其次，《几何原本》把形象的几何图形与严密的推理论证结合起来，使得它的理论能为大多数人而不仅仅是少数数学家所接受。第三，《几何原本》向学生提供了丰富多彩、从易到难的任何一个级别的习题，因而能激发学生高度的学习兴趣，使他们能全身心地投入到学习中去，这是其他任何课程所无法比拟的。直到今天人们还在不断地发现欧几里得几何的新定理和新证明。第四，在培养学生逻辑推理能力方面，欧几里得几何有其独到之处，它能充分发挥学生的个性，使学生灵活地去思考问题。直到现在还未找到更好的方式来代替它。

但是平面几何太难学了，我们不妨讲一个古老的故事。古希腊有位叫托勒密的国王，曾经向欧几里得本人学过几何学，但是国王被几何学中一连串的公理、定义、定理弄得头昏脑胀，对几何问题不知从何处下手，于是托勒密国王就问欧几里得："亲爱的欧几里得先生，能不能把你的几何弄得简单些。"欧几里得回答说："没有一条专为国王而设的通往几何的路。"人们在讲述这个古老的故事时，总是对数学家欧几里得怀着敬佩之情。欧几里得讲出了一个真理，国王和平民一样，只有老老实实地去学习，才能掌握几何学，科学不会因为你是国王而变得容易起来。但是国王的话却道出了几何学习者的心声。2000 多年来，几何被公认为难学的课程，学生成绩好坏的分化往往是从几何这门课开始的。能不能使几何变成一门更容易学的课程，一直是人们所探索的问题。

对于欧几里得的生平，现在知道的很少。他早年大概就学于雅典，深知柏拉图的学说。公元前 300 年左右，应托勒密王的邀请，在亚历山大从事教学工作，并在该处授徒。他是一位温良敦厚的教育家。

欧几里得将前人积累的几何成果整理系统化，并加以提高，总结成一部流芳千古的巨著——《几何原本》。张景中院士称《几何原本》“是对数学材料进行再创造的第一个取得辉煌成就的范例”。《几何原本》属于教育数学(不同于数学教育)的范畴。真正的《几何原本》并没有流传下来，留下来的都是一些修订本，较早发现的是公元 4 世纪来自亚历山大的狄恩的修订本。公元 10 世纪在梵蒂冈图书馆发现了希腊的手稿，这是狄恩以前欧几里得著作的一个手抄本。后来的《几何原本》的内容主要来自于这两个手抄本。

我国最早的译本是 1607 年由利马窦(意大利的传教士，曾在我国澳门居住过)、徐光启合译的《几何原本》的前六卷，和 1857 年由伟烈亚力、李善兰合译的后七卷。据说元朝也曾有过译本，但已失传。

以狄恩修订本为准，《几何原本》共 13 卷，467 个命题。

13 卷的主要内容为：

第一卷　给出了 23 个定义、5 条公设、9 条公理、三角形全等、边角关系、平行线、平行四边形等。

第二卷　讨论了线段的运算。

第三卷　关于圆的 37 个命题，讨论了圆的性质。

第四卷　圆的内接多边形和外切多边形。

第五卷　比例理论。

第六卷　用比例研究相似多边形。

第七、八、九卷　数论(算术)。

第十卷　不可公度量的分类和它们的几何运算。

第十一、十二、十三卷　立体几何。

其中的 7 个定义是：

(1) 点是没有部分的。

(2) 线有长度没有宽度。

(3) 线的界限是点。

(4) 直线是这样的线,它上面的点是一样放置着的。

(5) 面只有长度和宽度。

(6) 面的界限是线。

(7) 平面是这样的面,它上面的直线是一样放置着的。

5 条公设为:

(1) 从每一点到另一点必定可以引直线。

(2) 每条直线可以无限延长。

(3) 以任意点为中心,任意线段长为半径可作圆。

(4) 所有直角都相等。

(5) (平行公理)两条直线被第三条直线所截,若在某一侧的内角和小于两直角,那末这两条直线必相交。

9 条公理为:

(1) 等于同量的量相等。

(2) 等量加等量,其和相等。

(3) 等量减等量,其差相等。

(4) 不等量加等量,其和不等。

(5) 等量的两倍仍相等。

(6) 等量的一半仍相等。

(7) 能重合的量相等。

(8) 整体大于部分。

(9) 两条直线不能包围一部分空间。

欧几里得从 23 个定义、5 条公设、9 条公理出发,用逻辑推理的方法演绎成一门几何学,也称欧几里得几何(基本上是中学的几何),开创了公理化数学的先河。正因为如此,欧几里得的名字与几何学成了同义语而流芳千古。

但是，欧几里得的《几何原本》至少存在以下 5 个方面的缺陷。第一，有些定义含糊不清，有时无法理解，用的都是一些日常用语，而不是精确的数学语言。如“点是没有部分的”、“线有长度没有宽度”等。第二，证明过程常常依赖直观，这样可能由于作图不准确或直观错觉，导致得出不正确的结论。第三，公理系不完备，缺少顺序公理、合同公理和连续公理。第四，有些公理不独立，例如，第四公设“所有直角都相等”很容易从别的公理推导出来。第五，利用图形移动不变性，用迭合（重合）来证明全等，此法至少有两点不足：①移动、重合概念没有逻辑依据。②为什么会有图形移动的不变性及哪些几何性质在图形移动中不变都没交待清楚，也不可能交待清楚。

从希尔伯特公理系到张景中公理系

为了克服上面提到的欧几里得《几何原本》中所存在的缺陷，人们主要从以下两个方面进行研究。

一方面是对《几何原本》的批判，完善欧几里得几何公理系

早在公元3世纪就有人敢于对《几何原本》提出过批判。著名数学家高斯对《几何原本》中缺乏“介于”关系的清晰定义提出过批判，他还找到一些实例说明，在缺少对“介于”关系正确定义的情况下，往往会导致错误的证明。1757年，法国数学家达朗贝尔提出，为了适应时代的需要，新编的几何教材应是平面几何与立体几何的适当结合，使用解析法，微积分思想应占重要位

置。1794年数学家勒让德写了一本新几何教材，影响颇大，它比较精炼，减少繁琐的、过分追求技巧的练习。

在完善欧几里得公理体系的过程中，德国大数学家希尔伯特功不可没，他在1899年出版的《几何基础》一书，是一部公认的公理化方面的经典不朽之作。他在书中完全摈弃了对几何对象点、线、面，以及由它们构成的图形的性质的直观描述。希尔伯特在《几何基础》中阐明了现代公理化的基本思想：先提出几个不加定义的原始概念，并列出规定这些原始概念之间关系的若干条公理，组成一个公理系，然后从这些基本概念和公理系出发，利用逻辑推理方法，导出一系列的命题（定理），同时，还可以定义新的概念，得到新的定理，这样就形成了一门几何学的全部内容。

希尔伯特提出了6个原始概念：点、线、面、在……之间、在……之上、合同于，5个基本关系：两个结合关系（点与直线结合、点与平面结合）、1个顺序关系（一点在另两点之间）、两个合同关系（线段与线段合同、角与角合同），并逐步提出5类共20条公理的公理系，即希尔伯特欧氏几何公理系，它们分别是：

1. 关联公理（亦称结合公理或从属公理）

（1）对于两个不同的点，恒有一条直线通过其中每一个点。

（2）对于两个不同的点，至多有一条直线通过这两个点。

（3）每条直线上至少有两个不同的点，至少有三个点不在同一条直线上。

（4）对于不在一条直线上的三个点，恒有一个平面通过其中每一个点，每个平面上至少有一个点。

（5）对于不在同一直线上的三个点，至多有一个平面通过其中每一个点。

(6) 如果直线 a 上有两个(不同的)点在平面 α 上,那么直线 a 的每个点都在平面 α 上。

(7) 如果两个平面有一个公共点,那么至少有另一个公共点。

(8) 至少有四个点不在同一个平面上 。

其中,“通过”这一词可用其他词代替,例如“直线 a 通过点 A 和 B 的每一点”这句话,可用“A 和 B 属于 a”或“a 连接 A 和 B”代替等。

2. 顺序公理(亦称介于公理)

(1) 如果点 B 在点 A 与点 C 之间,那么 A、B、C 是同一条直线上三个不同的点,而且点 B 在点 C 和点 A 之间。

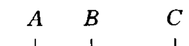


图 2-1

(2) 对于任意两个(不同的)点 A 和点 B,至少有一点 C,使点 B 在点 A 与点 C 之间。

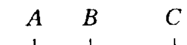


图 2-2

(3) 在同一条直线上任意三个不同的点中,至多有一个点在其他两个点之间。

(4) (巴士公理)设 A、B、C 三点不在同一条直线上,而直线 a 在平面 ABC 上,但不通过 A、B、C 中任何一点。如果 a 通过线段 AB 的一内点,则它必定也通过线段 BC 的一内点或 AC 的一内点。

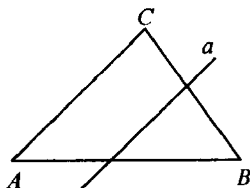


图 2-3

3. 合同公理(亦称全合公理)

(1) 设 A、B 是直线 a 上两个不同的点,A' 是同一或另一直线 a' 上的点,那么在 a' 上 A' 的指定一侧恒有点 B',使线段 AB 和 $A'B'$ 合同(相等或全合),记为 $AB \equiv A'B'$。

（2）如果两条线段（相同的或不同的）都与第三条线段合同，那么这两条线段合同（相等）。简言之，若 $A'B' \equiv AB$，$A''B'' \equiv AB$，则 $A'B' \equiv A''B''$。

（3）设 AB 和 BC 是直线 a 上两条没有公共内点的线段，$A'B'$ 和 $B'C'$ 是同一或另一直线 a' 上两个没有公共内点的线段。如果 AB 与 $A'B'$ 合同，BC 与 $B'C'$ 合同，那么 AC 与 $A'C'$ 合同。简言之，若 $AB \equiv A'B'$ 而且 $BC \equiv B'C'$，则 $AC \equiv A'C'$（线段可加性）。



图 2-4

（4）已知平面 α 上的一个角 $\angle(h,k)$，同一或另一平面 α' 上的一条直线 a' 和 a' 上以 O' 为顶点的射线 h'，那么在 α' 上 a' 的指定一侧恰有一条射线 k'，使 $\angle(h,k)$ 与 $\angle(h',k')$ 合同；$\angle(h,k)$ 与自身合同。

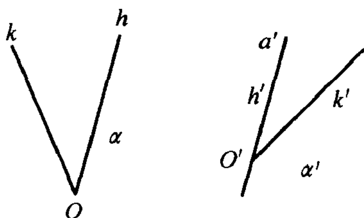


图 2-5

（5）对于两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$，如果线段 AB 与 $A'B'$ 合同，线段 AC 与 $A'C'$ 合同，$\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$ 合同，那么 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 合同。

4. 平行公理

设 a 是任一直线，A 是 a 外的任一点，在 a 与 A 所确定的平面上至多有一条直线通过 A 且与 a 不相交。

5. 连续公理

（1）（阿基米德公理或度量公理）对于任意线段 AB 与 CD，在以点 A 为顶点，通过点 B 的射线上，存在有限个点 A_1、A_2、……、A_n，使得线段 AA_1、A_1A_2、……、$A_{n-1}A_n$ 都与 CD 合同，而且点 B 在点 A 与 A_n 之间。

（2）（直线完备性公理）直线上的点所成的点集，连同其顺序关系和合同关系，不能再行扩充，使得扩充以后，仍满足关联公理、顺序公理、合同公理、阿基米德公理。这就是说，不可能在这条直线上增加新点，使得原来的点和新点所组成的点集还适合关联公理、顺序公理、合同公理、阿基米德公理。

根据以上 5 类 20 条公理，利用逻辑推理的方法就可以得到欧几里得几何的全部内容。在希尔伯特公理系上所建立的欧氏几何，完全克服了上面提到的《几何原本》中所存在的缺陷，使得欧几里得几何公理系达到非常完美的境界。希尔伯特所提出的公理化方法，不仅开创了用现代公理化方法演绎成一门数学学科——几何学，而且对 20 世纪现代数学产生了深远的影响。可以毫不夸张地说，20 世纪的数学基本上是公理化数学。但是希尔伯特的欧几里得公理系也有它的缺陷，那就是它使几何离开人们更远，变成了数学家的几何，而不是大众的几何，就连希尔伯特本人也不愿意在自己的公理系上去建立欧几里得几何，因为这太繁太难了。

如何判定一个公理系的合理性？希尔伯特在其著作《几何基础》中对公理系的合理性提出了三条标准。

第一，相容性。就是在一个合理的公理系中，各个公理之间没有矛盾。即在一个公理系中，公理与公理之间不能相互矛盾。如果在一个公理系下，能推出两个相互矛盾的命题。那么这一公理系一定有问题。因此公理系的无矛盾性或称为相容性是对公理系的最起码的要求。

第二，独立性。公理系中每一条公理不会是多余的，即其中任何一条公理都不能由这个公理系中其他公理推导出来。也就是说，在一个合理的公理系中，每个公理都是相互独立的。公理具有独立性，说明它所包含的公理个数是极少的。

第三，完备性。即满足这个公理系本质上只有一个，不能再添加新的独立公理到此公理系中，加上去就会产生矛盾。完备性表明，公理系中公理个数是极大的。

检验一个公理系是否合理的三条标准看起来似乎很简单，也能为人们所接受，但是如果你要去检验一个公理系是否符合这三条标准，却不是一件容易的事。例如一个公理系的无矛盾性（相容性）是最重要的，如果一个公理系中的公理之间相互矛盾，那就没有人信服这个公理系的正确性，也就没有必要从这一有问题的公理系去建立一门数学学科。但是，推不出矛盾并不能保证这个公理系是没有矛盾的，只是你暂时没有认识到，将来可能会推出矛盾，因此用直接的方法去检验这三条标准是相当困难的。

希尔伯特所提出的检验公理系的合理性的三条标准中，公理的无矛盾性（相容性）是必要的，但是对于一门学科来说，公理的独立性和完备性并不是必需的条件。例如满足希尔伯特欧几里得几何公理系中关联公理、顺序公理、合同公理、连续公理的称为绝对几何学。在这套公理系上能建立另一门几何学——绝对几何学，显然这个公理系是不完备的，因为加上平行公理它才完备。公理系的完备性是非常完美的，可是公理系的不完备却能使我们的研究更丰富多采。而公理系的独立性是使公理系中公理的个数最少，这往往会增加难度。因此在中学几何教材中，并不能引进完美的希尔伯特的欧里几得几何公理系，而是要添加一些并不独立的公理，这样就可以降低

难度，便于中学生学习。

另一方面，从现代数学的角度考虑欧几里得几何公理

怎样用现代数学的观点来处理欧氏几何公理系呢？集合论是现代数学的基础，如果在一个集合中引进一定的数学结构，例如加、减、乘、除等代数运算以及长度都可以成为一种数学结构，就可以使其成为某一现代数学的理论。如向量空间就是在集合中引进了满足一定规则的向量加法运算和向量数乘运算的集合。德国数学家外尔在向量空间的基础上，建立了一套欧氏几何公理系，它是由向量加法公理、向量数乘公理、向量内积公理、维数公理和向量存在公理等 5 组 17 条公理组成，这里就不评述，请参考有关书籍。外尔的欧氏几何公理系与希尔伯特的欧氏几何公理系是等价的。

如果在集合中引进距离（距离是通常长度概念的推广）这一数学结构，那它成为距离（度量）空间。下面我们介绍度量空间的概念。

定义　设 M 是一个非空集合，对于 M 中的任意元素（也可称为点）x、y，都能确定一个非负的实数 $\rho(x,y)$（设 z 是 M 中另一元素），满足

(1) （非负性）$\rho(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时，有 $\rho(x,y)=0$；

(2) （对称性）$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) （三角不等式）$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$。

则称 M 为度量（距离）空间，记为 (M,ρ)。$\rho(x,y)$ 称为点 x 与 y 之间的距离。例如平面上点 $A(x,y)$ 与点 $B(x_1,y_1)$ 之间的距离也就是 AB 的长度，可定义为

$$\rho(A,B)=|AB|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}。$$

在上述定义中,(1)表示距离是非负的,这与长度的性质是一样的,(2)说明 x 到 y 的距离与 y 到 x 的距离相等,而(3)就是长度中三角形两边之和大于第三边的推广。

美国几何学家帕鲁米查尔在 1961 年出版的《几何学的现代观点》一书中,在度量空间的基础上,提出了一套新的欧氏几何公理系,这套公理系关于平面几何只有 6 条公理。

公理 1　(M,ρ)是度量空间。

公理 2　对 M 中不同的两点 A、B,总有不同于 A、B 的点 P,使

$$\rho(A,P)+\rho(P,B)=\rho(A,B)。$$

此式叫做度量凸性。

公理 3　对 M 中不同的两点 A、B,总有不同于 A、B 的点 P,使

$$\rho(A,B)+\rho(B,P)=\rho(A,P)。$$

此式叫做度量外凸性。

公理 4　空间 M 是完备的。即若 P_1、P_2……P_n……是 M 中的无穷点列,且 $\lim\limits_{i,j\to\infty}\rho(P_i,P_j)=0$,则存在一点 $P\in M$,使

$$\underset{n\to\infty}{\rho}(P_n,P)=0。$$

公理 5　空间 M 含有三点 A、B、C,使 $\rho(A,B)$、$\rho(B,C)$、$\rho(C,A)$中没有一个等于另外两个之和。

公理 6　对于 M 中任意四点 A、B、C、D,有

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \rho(A,B) & \rho(A,C) & \rho(A,D) \\ 1 & \rho(A,B) & 0 & \rho(B,C) & \rho(B,D) \\ 1 & \rho(A,C) & \rho(B,C) & 0 & \rho(C,D) \\ 1 & \rho(A,D) & \rho(B,D) & \rho(C,D) & 0 \end{vmatrix}=0。$$

上面的行列式叫凯莱-门格行列式，是距离几何研究中的一个重要工具。

上述公理系不易理解，但它与希尔伯特欧氏几何公理系也是等价的。也就是说，从它出发也可以展开成欧几里得几何学。公理 1 表明 M 是一个度量空间，主要有“三角形两边之和大于第三边”这一性质；公理 2 保证了两点之间还有点；公理 3 保证了线段可以延长；公理 4 保证了在 M 中，极限运算是封闭的；公理 5 保证了至少有三点不共线；公理 6 的几何意义是平面上任意四点形成的“四面体”体积为 0。

不论是希尔伯特欧氏几何公理系，还是外尔或帕鲁米查尔所提出的公理系，虽然都非常完美，有的还很现代，但是它们都有一个共同的缺陷，那就是公理系与解题方法没有什么联系。也就是说掌握了公理系，还不能悟出解题的道道来。能不能建立一种欧氏几何公理系，使它与解题方法联系起来？我国著名数学家张景中院士就在这方面有所突破，下面我们介绍张景中的欧几里得几何公理系。

从 1975 年开始，张景中院士就以一种新的观点去考虑欧几里得几何。他利用面积的方法去审视欧几里得几何公理系。1996 年他在《平面几何新路（基础部分）》一书中，成功地提出了欧氏几何新的公理系。张景中欧氏几何公理系由 3 组共 11 条公理组成，它们分别是：

1. 第一组公理（距离公理）

距离公理　任意两点 A、B 确定一个非负实数 $|AB|$，叫做点 A 与 B 之间的距离。

直线惟一公理　经过不同的两点 A、B 有且仅有一条直线，记为 AB。

直线完备公理　对任一条直线 AB，存在 AB 到实数集

的一一对应，使得若 P、Q 分别对应于 x、y，P、Q 之间的距离定义为

$$|PQ|=|x-y|。$$

2. 第二组公理（面积公理）

面积公理　任三点 A、B、C 对应一个非负实数 $S_{ABC}=S_{BCA}$，叫做三角形 ABC 的面积，存在不同的三点 X、Y、Z 使 $S_{XYZ}>0$。当 $S_{ABC}=0$ 时，A、B、C 三点在同一直线上。

线性公理　若 A、B、C 三点在同一直线上，$|BC|=t|AB|$，则对于任一点 P，有

$$S_{PBC}=tS_{PAB}。$$

如图 2-6。

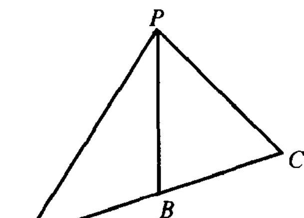


图 2-6

维数公理　任意四点 A、B、C、D 所连成的 6 条线段中，如果任意两条都没有公共内点，则四个面积 S_{ABC}、S_{ABD}、S_{ACD}、S_{BCD}之中，必有一个等于另外三个之和。

面积分割公理　对任意不共线三点 A、B、C 和满足条件 $x+y+z=S_{ABC}$的三个非负实数 x、y、z，有且仅有一点 P，满足 $S_{PBC}=x$，$S_{PAC}=y$，$S_{PAB}=z$，并且 P 在平面 ABC 上。如图2-7。

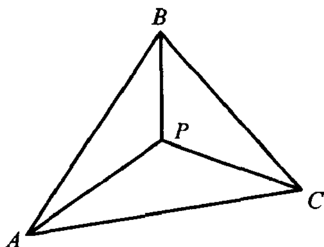


图 2-7

3. 第三组公理（角度公理）

角度公理　任意三点 A、P、B，当 P 不与 A、B 中任一点

重合时，确定一个非负实数$\angle APB=\angle BPA\leqslant\pi$。当且仅当$P$在$A$、$B$之间时，$\angle APB=\pi$。当且仅当$B$在射线$PA$上时，有$\angle APB=0$。

角度可加性

(1) 当$\angle APB<\pi$时，对于$\angle APB$内或其边上任一不同于点P的点Q，有

$$\angle APQ+\angle QPB-\angle APB。$$

(2) 若点P在点A、B之间，对任一不同于P的点Q，有

$$\angle APQ+\angle QPB=\pi。$$

角度连续性　当$\angle APB<\pi$时，对任一非负实数$\alpha\leqslant\angle APB$，在线段$AB$上有一点$Q$，使$\angle APQ=\alpha$。

刚性公理　若$\angle APB=\angle CQD$，并且$|AP|=|CQ|$，$|BP|=|DQ|$，则$S_{APB}=S_{CQD}$。

在张景中欧氏几何公理系中，引进了三个几何量：距离、面积和角度，它们都是由某些点构成的图形所对应的确定的非负实数。在距离公理中没有列出$|AA|=0$的要求，因为这一性质可从直线完备公理导出，若点A对应实数a，则有$|AA|=|a-a|=0$。

张景中欧氏几何公理系有如下特点：

(1) 张景中欧氏几何公理系最大的特点是第一次将公理系的建立与解题方法通过面积建立某种联系，将几何作图与证明步骤结合起来，从而使证明几何命题可按一定步骤进行。它用面积方法很快导出共边定理、共角定理、勾股差定理(后面会介绍)等解题“利剑”，并在此基础上创立了消点算法。消点算法的基本思想，就是将所要证明的结论化为左边全部是英文字母(代表点)，右边是一个数字，然后按一定算法将左边的字母全部消去，如果最后得到的数字与原先右边的数字相

同，则命题就被证明。消点算法实质上是一个“万能算法”，它可以解决平面几何中的大部分问题。

（2）消点算法不仅可以用笔在纸上进行演算，而且可以应用于计算机上进行初等几何定理的机器证明。1992年张景中与周咸青、高小山合作应用消点算法于几何定理的机器证明的研究，使得近三十年没有取得什么进展的自动生成可读性证明取得了突破性的进展，被专家誉为“一个里程碑”。他们在Windows系统下，编制出“几何专家V2.0”的软件，并在计算机上证明了600多个不平凡的初等几何定理。而在计算机上所给出的证明与在纸上演算的证明完全一致。

（3）这个公理系完全符合现代公理系的原则。从张景中欧氏几何公理系出发，完全可以推导出欧氏几何学的全部内部，而且它与最现代的计算机结合起来。这将会使平面几何的教学产生变革性的影响。

（4）在张景中欧氏几何公理系中，没有将平行公理列入其中，这也是它的特点之一。前面所提到的任何欧氏几何公理系中，都不敢对平行公理作变动，因为平行公理对欧氏几何学太重要了，这说明张景中是一位有胆识又具有创造性的科学家。

中学平面几何的公理系

希尔伯特从纯粹数学出发对《几何原本》的完善而建立的欧几里得几何的现代公理系离中学实际太远，这样就有了从数学教育角度改善《几何原本》中的缺陷进行的探索。它要求所建立的欧氏几何公理系既要保持像《几何原本》那样为多数人所接受，又应具有科学性和时代性，以适应时代的要求和中学的实际。因此数学教育要求的欧氏几何公理系，首先要求的是简明、直观、易于展开，以中学生能接受为前提。其次才要求严谨、科学和现代化。下面我们介绍几套从数学教育角度出发而建立的中学平面几何的公理系。

由苏联科学院院士、现代概率论的奠

基人柯尔莫哥洛夫主编的苏联中学几何课本中所提出的公理系由5组12条公理组成。

1. 第一组公理(结合公理)

(1) 每一条直线是点集。

(2) 对任何不重合的两点,存在一条且仅存在一条直线包含这两点。

(3) 至少存在一条直线,每一条直线上至少有一个点。

2. 第二组公理(距离公理)

(1) 任两点 A 和 B,都有一非负实数 $|AB|$ 与之对应,这个数叫做点 A 到点 B 的距离,当且仅当 A、B 两点重合时,距离 $|AB|=0$。

(2) $|AB|=|BA|$。

(3) 对于任意三点 A、B、C,有

$$|AC|\leqslant|AB|+|BC|。$$

3. 第三组公理(顺序公理)

(1) 同一直线上的三点中,必有一点在另外两点之间。

(2) 直线 l 上任一点 O,把直线 l 上除点 O 以外的点分成两个非空子集,使得点 O 位于分属于两个子集的任意两点之间。

(3) 对于任何非负实数 a,在始点为 O 的射线上有且仅有一点 P,使 $|PO|=a$。

(4) 任一直线将平面上不属于它的点的集合分为两个非空的凸区域。

4. 第四组公理(运动公理)

设直线 AP 和 BQ 分别是半平面 α 和 β 的边界。存在惟一的位移,把半平面 α 移到 β 上,点 A 移到点 B 处,且射线

AP 移到射线 BQ 上。

5. 第五组公理(平行公理)

经过平面上任意一点,至多只能作一条直线平行于已知直线。

上述柯尔莫哥洛夫公理系是建立在现代数学度量空间的基础上的。其第二组公理就是度量空间的基本概念和性质,此公理系把直线看做集合,也就是承认了集合概念。在直线与实数之间建立了一一对应关系,并引进了运动,充分体现了现代数学的思想,又具有简明、直观的特点。

在日本高中数学教科书中,则推出了更为简明的中学平面几何公理系,它只有6条公理。

公理1　通过相异两点的直线只有一条。

公理2　直线 l 把平面分成 π_1 和 π_2 两部分。

(1) 若两点 A 和 B 同属于一部分,则线段 AB 与直线 l 不相交。

(2) 若 A、B 两点分属于两部分,则线段 AB 与直线 l 相交。

公理3　已知 $\angle AOB$ 和直线 PQ,则在直线 PQ 任一侧,只能引一条直线 PR,使 $\angle QPR=\angle AOB$。

公理4　已知线段 AB 和直线 l 上的点 O,则在 l 上点 O 的一侧,只能确定一点 C,使 $OC=AB$。

公理5(全等公理)　相等的线段、相等的角可相互重合,且可重合的线段、可重合的角相等。

公理6(平行公理)　过不在直线上一点,只有一条直线与该直线平行。

这套公理系比柯尔莫哥洛夫公理系使用了更多的几何量,它不但涉及线段相等和角度相等,公理3、公理4还介绍

了如何作一线段与已知线段相等，作一角与已知角相等。

上述两套公理系只涉及平面几何，有了平面几何公理系，扩展为立体几何公理是不难的。

20世纪90年代初，我国所使用的统编中学几何教材，则选用了如下9条公理。

公理1　经过两点有一直线，并且只有一条直线。

公理2　在所有连接两点的线中，线段最短。

公理3(平行公理)　经过直线外一点，有一条而且只有一条直线和这条直线平行。

公理4　两条直线被第三条线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行。

公理5(边角边公理)　有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等。

公理6(角边角公理)　有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等。

公理7　矩形面积等于它的长和宽的乘积。

公理8　如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

公理9　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且仅有一条通过这个点的公共直线。

公理10　通过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面。

公理11　长方体的体积等于它的长、宽、高的乘积。

公理12(祖暅原理)　夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果所截得的两个截面的面积总是相等，那么这两个几何体的体积相等。

这套公理系的最大特点，是将我国古代数学家祖暅(我国

古代数学家祖冲之的儿子)所创立的原理列入中学几何公理系。其次是为了简化教材,降低难度,我国平面几何在初中讲授。学生的年龄小,思维不成熟,因此把学生在小学就熟悉的长方形面积和长方体体积计算公式都列入公理系,使学生对公理系有一种亲近感,易于接受。像公理 4、公理 5、公理 6 都可以从其他公理推导出来,也列为公理,之所以这样做,完全是为了中学教学上的需要,以学生易于接受为前提,从而减轻了教学上的难度。另外,为了简化推导过程的复杂性,对许多基本概念都不给出精确的定义,而是直接使用,例如“两点之间”、“同侧”、“异侧”等,甚至默认了一些命题的成立,等等。

公理 2 是古希腊科学家阿基米德提出的一个命题,这是一个比较复杂、不是用一两句话就能讲清楚的问题。如果承认线段最短,那么就默认连接这两点的其他(曲)线的长度都存在,这些其他线的长度是怎样定义的没有说明,长度是否存在也没说清楚。那怎么能比较它们与线段的长短?只能靠直观。实际上,什么是一般线的长度是比较复杂的问题,一般的(曲)线的长度是由将此(曲)线分成许多小段,每一小段的两端点可以连成线段,由这些线段所组成的是一条折线,而折线的长度是可以定义的,此折线的长度就可以近似地看做曲线的长度。当曲线被分成更多小段,而相应的折线长更接近于曲线的长度,这样折线长的极限(如果这极限存在)就可精确地定义为曲线的长度。这里就有个问题,如果折线长的极限不存在,那曲线就没有长度可言。现在已经发现了,存在有这样的曲线,它没有通常的长度。因此公理 2 的叙述是不严密的。

现在九年义务教育三年制的初中几何教材提出了如下 9 条公理。

公理 1　经过两点有一条直线,并且只有一条直线。

公理 2　所有连接两点的线中，线段最短。

公理 3(平行公理)　经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行。

公理 4　两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行。

公理 5　两条平行线被第三条直线所截，同位角相等。

公理 6(边角边公理)　有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等(简称“边角边”或“SAS”)。

公理 7(角边角公理)　有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等(简称“角边角”或“ASA”)。

公理 8(边边边公理)　三边都对应相等的两个三角形全等(简称“边边边”或“SSS”)。

公理 9(斜边直角边公理)　有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(简称“斜边直角边”或“HL”)。

上述公理系把全等三角形的基本性质都列入其中，这也有它的道理。因为学生在平面几何中接触的大多是全等三角形，这样就更能简化教材。

西南师范大学陈重穆教授编写了一套 GX 初中数学实验教材，其中几何有 3 册，在这套几何实验教材中，引入了以下几组公理：

1. 有关点和直线的公理

(1) 每两点确定一条直线。

(2) 两点间，线段最短。

2. 有关平行线的公理

(1) 平行公理：经过直线外一点作已知直线的平行线，能且只能作一条。

(2) 同位角公理：同位角相等，两直线平行。

3. 可加性公理

全量等于部分量之和(长度、角度、面积均具可加性)。

4. 等量公理

(1) 等量的和、差、积、商(除数不为0)仍相等。

$$\left[a=b,c=d\Rightarrow a\pm c=b\pm d,ac=bd,\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\quad(c\neq 0,d\neq 0)\right]$$

(2) 同等于第三量的量相等(等量代换)。

5. 不等量公理

(1) 不等量加上或减去等量,不等号保持不变。

$$(a>b\Rightarrow a+c>b+c,a-c>b-c)$$

(2) 不等量乘以或除以同一正量,不等号保持不变。

$$\left(a,b,c>0\Rightarrow ac>bc,\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$$

(3) 第一量大于第二量,第二量大于第三量,则第一量大于第三量。(不等量的传递性,即 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$)

(4) 全量大于部分。

6. 有关全等三角的公理(全等三角形的判定)

(1) 有三边对应相等的两个三角形全等(可简写为“边边边”或“SSS”)。

(2) 有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等(简写为“边角边”或“SAS”)。

(3) 有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等(简写为“角边角”或“ASA”)。

7. 有关面积的公理

矩形的面积等于长和宽的积。

陈重穆教授编写的GX初中几何实验教材对待公理系只采用,不刻意追求,淡化数学文字的叙述,在数学上提倡“积极

前进，循环上升；淡化形式，注意实质；开门见山，适当集中；先做后说，师生共作"的原则。在GX初中几何实验教材中，每章都安排课堂练习，补充习题、综合练习等，另外，每章还安排2～4课时的小结，通过章节的循环练习，期中和期末的复习，在教师主导下实现学生的主体地位，让学生积极参与，使课堂教学活跃起来。另外，教材中还配置了300多幅图形，使学生通过图形去思考问题，这样学生就可以在较短的时间内掌握平面几何的基本知识。现在已有不少学校试用这套教材，并取得了较好的效果。GX初中数学实验教材的出现，打破了我国由统编教材一统天下的局面，只有让不同类型的教材去实验，去比较，才能使中学平面几何的教学改革向更深层的方向发展。

上述我们列出了从数学教育的角度建立中学几何几种不同公理系的教材，这些教材都经过了中学教学的实验，是不同历史时期的产物。由此可以看出中学几何公理系简明、直观、易于接受这一原则是没有一定的标准的，它随着时代对中学教育要求的不同而不同。如果当时流行加强基础，中学几何公理系可能会更严密一些；如果当时教育环境要求的是更"大众"的数学，那中学几何公理系可能会更简单、更直观一些。中学几何公理系既然不能达到像希尔伯特公理系那样完美，而从数学教育角度去审视又没有一个最低标准，这就提出了一个问题：中学几何为什么一定要公理系，不要公理系行吗？有人可能认为使用公理系才能做到严密，吴文俊院士认为"这是唬人、骗人的"。中学几何的公理系既然做不到严密，我们就没有必要去追求这种公理系的严密性，吴文俊院士还提出"我们选择若干个原理，将几何内容串起来，比公理系要好"。在中学平面几何中，用原理代替公理，像经典力学那样，就是从牛顿

三大定律(原理)推演出来的。中国古代的几何学就没有公理系,但有原理,例如出入相补原理等,不是照样创造当时几何学的辉煌吗?

数学定理的机器证明发展简介

中国古代数学研究的中心问题是对问题的求解，它不是从数学本身去研究数学，而是将需要解决的问题(实际问题和数学问题)进行分类，把类似的或相同的问题归为一类，然后对每一类问题找出相应的求解方法或程式。如《九章算术》就是把问题分为九类，每一类问题给出一套解题方法，而所给的解题方法又是按一定的步骤去实现的。因此如果要求解一个数学问题，可首先判定这个问题属于那一类，然后按那一类问题所给出的解题方法对这一数学问题进行解答。学习者只要掌握少许的数学基本知识和基本方法，就能对号入座地去解决数学问题。用固定的程式(步骤)去解一

类问题，这就是机械化数学的基本思想，追求数学机械化的方法（现代的观点就是能在计算机上实现的方法）是中国古代数学的特点，也可以讲机械化思想是我国古代数学的优良传统。

以欧几里得为代表的西方古代数学与中国古代数学的研究方法完全不同。它研究的中心问题是对问题的求证。这是一种非机械化方法。从少数命题出发，通过建立一个合理的公理系，然后在此公理系上，利用严密的推理论证将一个一个的几何问题证明出来，而此公理系与解题方法又没有什么直接的联系。因此每个几何问题的证明都需要相当的技巧，学生即使熟记这些公理，也不一定能求证出几何问题，只能“望题兴叹”。造成几何难学的根本因素是欧几里得几何是一种非机械化方法。为了改变这一状况，在欧氏几何中恢复中国古代数学的机械化传统势在必行。

能不能找到一个办法，把几何定理的证明变成有章可循，能按一定的步骤或程式去推导、去求解，就像解代数中的一元二次方程问题那样，只要熟悉一元二次方程的求解方式，就能很容易地解决一元二次方程方面的许多问题？这就是机械化数学的思想，人们一直都在探索和研究这方面的问题。

17 世纪法国数学家笛卡尔为实现机械化数学的愿望找到一线希望。他曾设想：“一切问题化为数学问题，一切数学问题化为代数问题，一切代数问题化为代数方程组问题。”因为代数方程的求解是可以机械化的。他把问题想得过于简单，因为并不是任何问题都可化为数学问题，即使是数学问题也不一定能机械化。虽然笛卡尔并没有靠这一设想实现机械化，但这一思想却给数学应用于生产实际指明了方向。今天数学应用于实际就遵循了这一原则。首先将实际问题近似地化为物

理模型(或其他学科模型),再由此模型近似地建立一个数学模型,最后将所建立的数学模型近似地化为代数问题去解决。另外,笛卡尔所创立的解析几何使几何问题代数化,第一次将无章可循的几何问题按一定步骤化为代数问题去求解。这为几何问题实现机器证明提供了一个可遵循的依据。

比笛卡尔晚些时间的莱布尼兹,曾有过制造“推理机器”的设想,他为此研究过逻辑,设计并造出了一台能进行乘法运算的计算机,这样就促进了布尔代数、数理逻辑以及计算机的研究。

20 世纪初,德国数学家希尔伯特曾明确地提出了公理系的判定问题:有了一个公理系,就能在此公理系基础上提出各式各样的问题(命题),对这些问题能否找到一种机械化方法,即算法,对每个命题加以检验,判明它是否成立。经检验判明其正确的命题,就被认为是已经证明成立的命题,检验(判定)就是证明。经数理逻辑的研究表明,希尔伯特的要求太高,即使是初等数论范围内,对所有命题都能进行判定的机械化方法(算法)到现在还未找到。

在数学的发展中,公理化的思想与方法比机械化的追求和探索受到更多的重视。可以毫不夸张地说,20 世纪的数学是受公理化思想的影响而发展起来。只有一些具有远见卓识的数学家才执着追求着数学定理证明的机械化。

数学定理的机器证明(即在计算机上实现对数学定理的证明),如果没有能进行数学演算的计算机是绝对不可能实现的,计算机技术的发展为实现数学定理证明的机械化提供了物质基础。

1950 年波兰数学家塔斯基证明了一个引人注目的定理(塔斯基定理):初等几何以及初等代数范围的定理证明是可

以机械化的。这从理论上证明了初等几何和初等代数的定理是能够实现机器证明的。塔斯基还提出过制造所谓判定机器(证明机)的设想。然而他的设想和方法都不是切实可行的。直到目前为止,也没有取得什么令人信服的结果。用塔斯基的方法连初中平面几何中的一些很简单的定理的机器证明都没法实现,因为他的方法太繁。

1959年以来,美国科学家开始用电子计算机证明一些数学定理。1959年美籍华人科学家王浩教授设计了一个程序,用电子计算机证明了罗素、怀德海的巨著《数学原理》一书中的几百条定理,计算机上的证明仅用了9分钟。

1976年美国两位年轻的数学家阿佩尔和黑肯及计算机专家考克,在高速电子计算机上用了1200多小时的计算时间,证明了“四色问题”,使数学家们100多年来没有解决的难题得到肯定的回答。但是在数学界还有不少人认为机器证明不能算作证明,而拒绝承认“四色问题”被证明的事实。直到现在还有人在寻求用数学的方法证明“四色问题”。

1852年英国人古特列提出著名的“四色问题”:“如果只用四种颜色,我们能否对球面上(平面上)的任何地图正确地着色?”也就是说,只用四种颜色能否区分地球仪上(地图上)的所有不同的国家。1968年,奥尔和斯坦帕尔用传统的数学方法证明了不多于40个国家的任何地图可以用四种颜色正确地着色。但是超过40个国家的“四色问题”的数学证明直到现在还未找到。

1976年,阿佩尔和黑肯等人将“四色问题”中的图形分成2300多种类型,对每一种类型要计算机回答:会不会有这样的类型,它不能用四种颜色正确地着色,经过亿万次的计算,计算机给出“否定”回答,然后转入下一类型,直到对所有类型

都得到“否定”回答后，他们声称自己得到了“四色问题”的计算机解，宣布解决了“四色问题”。对于这种计算机证明，有人就提出怀疑，“计算机解的基础是应用计算机进行大量的难以置信的计算，并且核对这种计算的正确性实际不可能。”“本来嘛，网络的有些类型例如第 17 种类型，计算机可能由于电子路线瞬时的失误(这是常发生的)，便会对它未经无可非议的分析就作出‘否定’回答，并不知情的计算机就转到第 18 种类型，第 19 种类型……实际上漏掉了对第 17 种类型的探讨。甚至在我们花费了几个月的时间后，重复同一实验的情形下，会不会在与第 17 种类型有关的亿万次计算环节中，我们的计算机发生差错。”因而“计算机解的正确性并无保证”。有的数学家认为，用大型电子计算机成功地解决了“四色问题”的消息“即使是真的，我们总觉得没有什么数学味道”。由于“四色问题”的计算机证明没有给出可靠的数学理论依据，这也是它不能让数学家信服的原因之一。

《数学原理》中的数学问题毕竟太平凡、太简单了，用计算机单打一地证明“四色问题”太特殊了，最多也只能算是计算机辅助证明。能不能用计算机证明成批或大部分的数学定理？能不能使计算机的证明更自动、更简捷、更漂亮？

塔斯基定理发表了 20 多年，初等几何定理的机器证明仍没有取得令人满意的结果，用塔斯基的方法连中学几何课本中许多简单的定理都证不出来。有些专家发出这样的悲观论调：光靠计算机，再过 100 年也未必能证明出多少有意义的数学定理来。

中国数学家对初等几何定理的机器证明所作出的重大贡献

中国数学家在初等几何定理的机器证明这一研究领域作出了前所未有的贡献。

1977年，吴文俊院士创立几何定理的机器证明新方法的论文“初等几何判定问题与机械化证明”在《中国科学》杂志(1977年第6期)上正式发表，从而揭开了数学定理的机器证明的研究领域新的一页。人们利用吴方法在个人计算机上证明了一批很不简单的几何定理，如西姆松定理、弗尔巴哈定理、莫勒定理等，还发现了一些新定理。1989年周咸青还在美国出版了几何定理的机器证明的专著。他利用吴方法编制软件，在计算机上证明了512条定理，这些几何定理都有一定的难度，每条定理的证

明在计算机上所用时间只要几秒，其中有些还是新定理。吴文俊院士还将其方法推广到微分几何定理的机器证明上，并取得了一批成果。

吴方法开创了一条由公理化通往机械化的道路。用吴方法可以在计算机上证明初等几何的大部分定理(除几何不等式外)。更重要的是吴文俊院士为其所创立的方法建立了严密的数学理论依据，使人们特别是数学家们不再怀疑数学定理的机器证明的可靠性，因而能吸引更多的人参加数学定理的机器证明这一领域的研究，从而掀起了数学定理的机器证明研究的新高潮。在吴文俊院士关于几何定理的机器证明的第一篇论文发表后，美国等十几个国家的数学家、科学家先后发表数百篇这方面的论文。而吴文俊院士为他的数学定理的机器证明方法提供的数学理论还为后来人们提出的数值并行算法提供了科学依据。可以说吴文俊院士是我国数学定理的机器证明这一研究领域的开拓者和奠基人。

那么，吴方法又是怎样在计算机上实现的呢?

用吴方法证明几何命题分三个步骤进行。

第一步，将几何问题代数化

首先将几何定理的假设部分和结论部分，用解析几何的坐标方法将它们化为右边都等于零的一组代数等式：$f_1=0$，$f_2=0$……$f_s=0$ 和 $g=0$。这些代数等式一般是多项式，在这些多项式中含有两种变元(变量)：一种是受假设条件约束的，称为约束变元；另一种是自由选取不受假设条件约束的，称为自由变元。

第二步，整序，即将假设部分的多项式化为一种规范形式——三角化

将假设部分的多项式按约束变元利用类似于线性方程组

中高斯消元法那样重新排序，使得第一个多项式中只含有一个约束变元和其他自由变元，这个重新排列的约束变元称为 x_1，而在第二个多项式中只含有约束变元 x_1 和另一个称为 x_2 的约束变元以及自由变元，但不含有除了 x_1、x_2 外的其他约束变元……这一步骤一直继续下去，如果假设部分有 s 个多项式，而重新排序后最后的一个多项式就含有 s 个约束变元和自由变元。如果在多项式中不写出自由变元，而只写出约束变元，那么重新排列的多项式为：

$$f_1^*(\cdots,x_1)=0,$$

$$f_2^*(\cdots,x_1,x_2)=0,$$

$$f_3^*(\cdots,x_1,x_2,x_3)=0,$$

……

$$f_s^*(\cdots,x_1,x_2,\cdots,x_s)=0。$$

其中每个式子中的第一个省略号表示自由变元。这样最后化成按约束变元成三角形的多项式组，此多项式组称为吴(文俊)升列。

第三步，作逐次除法——验证结论真伪

把结论部分写成多项式 $g=0$，将 g 除以 f_s^*(经过整序后假设部分的最后一个多项式)，并把 g 和 f_s^* 看做约束变元 x_s 的多项式，得余式 R_s。为了避免商式中出现分式，实际上将 g 乘上一个因式 c_1，如果将这一辗转相除法写成等式就成

$$c_1g=a'_1f_s^*+R_s。\tag{1}$$

再用 f_{s-1}^*去除余式 R_s，把 f_{s-1}^*和 R_s 都看做约束变元 x_{s-1} 的多项式。为了避免商式中出现分式，实际上是将 f_{s-1}^*去除 c_2R_s，其中 c_2 为一因式，将这一辗转相除法写成等式，即为

$$c_2R_s=a'_2f_{s-1}^*+R_{s-1}。\tag{2}$$

这样一直继续下去，最后得

$$c_s R_2 = a'_s f_1^* + R_1(R)。 \qquad (3)$$

在上述等式中，在(1)式中乘以 c_2，再把(2)式代入(1)式得

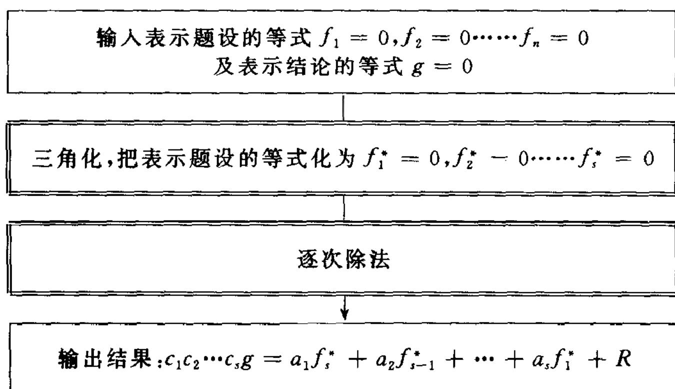
$$c_1 c_2 g = a'_1 c_2 f_s^* + a'_2 f_{s-1}^* + R_{s-1}。$$

依同样方法进行下去，并重新将 $f_i(i=1,2,\cdots,s)$的系数写成一般形式，最后得

$$c_1 c_2 \cdots c_s g = a_2 f_s^* + a_2 f_{s-1}^* + \cdots + a_s f_1^* + R_1(R)。 \qquad (4)$$

若上式 $R \equiv 0$，则表示在假设条件 $f_1=0, f_2=0 \cdots\cdots f_s=0$ 以及附加条件 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0 \cdots\cdots c_s \neq 0$ 下，必然有 $g=0$ 结论成立，于是几何命题得证。若 $R \neq 0$，则命题不成立。

吴方法的三个步骤可写成下面的计算程式



其中上表中间的两步都可以由计算机按已设计好的程序完成，而且不需要在大型或超级计算机上进行，只要在普通的计算机上就可以完成上述证明。即使在平面几何认为的一些难题，在计算机上所需的时间也就是十几秒。

在上述(4)式中左边的因式 c_1、$c_2 \cdots\cdots c_s$ 都不为 0，即 $c_1 \neq$

$0, c_2 \neq 0 \cdots\cdots c_s \neq 0$，称为非退化条件。非退化条件就是要求在吴方法的第二步经过整序成三角化的吴升列中，每个多项式出现的约束变元最高项的系数不为0。这是计算机本身的需要（作除法时，当除数（式）为0时计算机不能识别）。非退化条件的提出，是吴文俊院士对初等几何定理论证推理的又一大贡献。他指出初等几何定理的传统推理证法不但不严密，而且不可能做到严密，问题主要就是出现在对退化情形没有讨论。

在平面几何定理的传统证明过程中，通常要排除退化情形。比如一个三角形，就要求三角形的三个顶点不在同一条直线上，这就是非退化情形；若三个顶点都在同一条直线上就是退化情形。有些几何定理对退化情形也成立。但有些几何定理对退化情形不成立，这就需要讨论。例如，“在$\triangle ABC$中，若$\angle B = \angle C$，则$AB = AC$。”这个定理当$\angle B = \angle C = 0°$时是不成立的，如图5-1(a)。当$\angle B = \angle C = 90°$时，如图5-1(b)，定理是成立的，可见对退化情形是要单独进行讨论的。

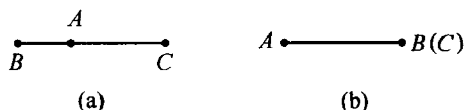


图5-1

在几何定理的假设中，排除了退化情形是不是就万事大吉了？几何定理的传统推理证法是不是就很严密了？问题没有那么简单。因为在几何定理的传统推理证明过程中，往往要作辅助线或辅助圆，对辅助图形运用了一些已知的定理，在辅助图形中，就可能遇到退化情形。而怎样去作辅助线或辅助圆，事先不可能知道，因而无法去预先说明会出现那些退化情形，这样就可能使证明失效。而证明中推理环节越多，就越可能出现退化情形，而破坏证明的严密性的可能性就会更大。

上述问题在吴方法中得到了圆满的解决。在吴方法的证明过程中能够自动地一一列出非退化情形的代数表示式子，能指出几何命题成立的非退化条件。至于退化情形，几何命题是否成立则要单独讨论，这种讨论通常是比较容易的，特别是对计算机来讲更是这样。因此，吴方法不但实现了几何定理的机器证明，而且使几何定理的证明比起传统推理证明达到真正的严密性。

应用吴方法还能使一些几何命题和结论分析得更清楚、更深刻。

19 世纪才发现的一个重要的几何定理——莫勒定理：在任意三角形中，三组相邻的内角三等分线的交点所组成的三角形是等边三角形。这个定理曾引起许多几何学家的普遍兴趣。它的证明是相当困难的。如果还考虑三角形的外角的三等分线，则可以构造出 27 个三角形。人们用吴方法证明了这样一个前所未知的有趣的事实：在这 27 个三角形中，有 18 个一定为等边三角形，而另外 9 个三角形一般不是等边三角形。如果用几何定理的传统证法是不可能得出这一结果的。这从另一角度说明了计算机证明几何定理的优越性。

应用吴方法还能证明不少的几何不等式，证明微分几何中的一些定理，研究微分方程的性质，推导代数和几何中的一些公式。吴方法的出现，开辟了数学定理机械化的一个新的研究领域。但是要通晓吴方法却不是一件容易的事，它不但计算程序复杂，而且数学理论也较为艰深。另外，应用吴方法在计算机上实现几何定理的机器证明，只告诉人们几何命题是否为真（当 $R\equiv 0$ 时），或者指出几何命题是否为假（当 $R\not\equiv 0$ 时），并没有向人们展示出几何命题证明的格式。它不像传统的几何推理论证那样有严密的逻辑推理格式，让人看得明白、

读得懂。吴方法所给出的证明很繁、很长，有时要涉及成百上千个多项式的计算或数值计算，但这对于电子计算机来讲是轻而易举的事，只需花几秒钟就能完成。这种机器明白而人不容易弄明白的“证而不明”的方法，像是在“暗箱”中操作(计算机中运算)，因此在多次国际会议上，不少专家提出能不能创造出使人也能弄明白的机器证明——可读性证明。

1992年张景中院士应邀赴美国访问，利用他所创立的消点算法与周咸青和高小山合作，在Windows系统下，成功地研究出具有可读性的几何定理自动生成的机器证明软件，使人们期待了近三十年的可读性证明第一次在计算机上实现。这种证明不是那种仅仅只有计算机能够读懂的“暗箱”式的证明，而是人和计算机都读得懂看得明白的证明。你只要将几何命题的内容按简单的机器语言输入计算机，计算机不仅能在屏幕上显示出与人用手在纸上演算相一致的算式，而且能以动态作图方式显示出相应的图形来。张景中院士等人所取得的成果，被著名计算机科学家Boyer誉为“使计算机能像处理算术一样处理几何的必由之路上的一个里程碑”。

张景中院士所创立的消点算法的基本思想是：首先将所要证明的几何命题的结论部分变形，使得等式右边是数字1或其他数字，然后根据作图顺序(后作的点先消去的逆向顺序)，利用由面积方法得出的共角定理、共边定理等将左边的英文字母(相当于点)依次消去，最后等式左边的字母全都消去而只剩下数字。如果所得的数字与右边原来的数字相等，几何命题得证。若所得的数字与右边原来的数字不相等，则几何命题有错。由于共边(共角)的图形比全等形或相似形的图形要广泛得多，可以讲是比比皆是，因此消点算法可以说是一种“万能算法”。下面我们举个简单的例子来说明消点算法的解

题步骤。

例 设$\triangle ABC$的两条中线AM、BN交于点G,求证:$AG=2GM$。

解 第一步,首先将定理的结论部分变形,将所有字母移到等式的左边,即要证明$AG/GM=2$。

第二步,作图。根据定理的假设条件依次将图形作出来:

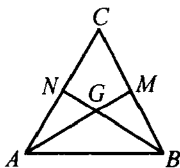


图 5-2

(1) 任取不共线三点A、B、C,作$\triangle ABC$(假设部分)。

(2) 作边BC的中线AM得中点M(假设部分)。

(3) 作边AC的中线BN得中点N(假设部分)。

(4) 作中线AM与BN的交点G(结论部分)。

第三步,证明。

$$\frac{AG}{GM}=\frac{S_{ABN}}{S_{BMN}} \quad \text{(用共边定理消去点 }G\text{)}$$

$$=\frac{S_{ABN}}{\frac{1}{2}S_{BCN}} \quad \text{(由点 }M\text{ 是 }BC\text{ 的中点消去点 }N\text{)}$$

$$=2\times\frac{\frac{1}{2}S_{ABC}}{\frac{1}{2}S_{ABC}} \quad \text{(由点 }N\text{ 是 }AC\text{ 的中点消去点 }N\text{)}$$

$$=2。$$

定理证毕。证明中的记号S代表三角形的面积。

注:在消点算法中,一般先消去最后作出的点,然后逆向逐个消去其他点。

消点算法一般从结论开始,这是一种符合人脑思维过程

的分析算法，不但思路清晰而且学生容易接受。

消点算法不仅提供了求解几何问题的固定程式(步骤)，学生学习消点算法后就能按一定的步骤用笔在纸上演算(证明)几何命题，就像学习代数一元二次方程那样按一定步骤去求解，从而使平面几何变得更容易学一些。更重要的是张景中院士将消点算法应用于几何定理的机器证明上，取得了突破性的进展，计算机在屏幕上显示的证明格式与人用笔在纸上演算几何命题的证明格式完全一致，实现了计算机的可读性证明。张景中院士等在 Windows 系统下编制了"几何专家 V2.0"可读性证明软件，并在计算机上证明了 600 多个不平凡的几何定理。最近，张景中院士等又研制出与现行中学几何教材同步的软件，这样就为在中学平面几何教学中实现计算机辅助教学铺平了道路。

1986 年洪加威在《中国科学》上发表论文指出：对于一类平面几何的定理，只要按照一个简单的规则去举例，并对具体的数值例子计算到一定的精确程度，就完全可以用来精确地判定一个一般的几何命题的正确性，这就是例证法，也就是用举例子的方法证明几何定理。洪加威所提出的方法在理论上是可行的，但由于其复杂性迄今未能在计算机上有效地实现。

几乎与洪加威同时，张景中院士和杨路教授提出了数值并行法。在计算机上实现了用举例子的方法来证明几何命题。这种方法在形式上更接近归纳法，它具有某种一般性的大量实例就可以证明一个一般的几何命题，这是第一个具有实践意义的用举例的方法来证明几何定理的数值方法，在计算机上可以在很短时间内实现。

用举例子的方法来证明数学定理，在数学界一直是很忌讳的问题。而张景中院士等利用数值并行法，在计算机上实现

了用举例来证明几何定理，这不仅在数学上是很漂亮的，而且对其哲学基础也会引起很大的震动。

吴文俊院士和张景中院士等先后划时代地解决了初等几何定理的机器证明及可读性证明这两大难题，这是中国数学家对数学定理的机器证明这一领域所作出的重大贡献。张景中院士等还在计算机上实现了用举例子方法证明几何定理。而博士生导师杨路教授又解决了几何不等式的机器证明问题，这样初等几何定理的机器证明的问题基本上是由我国数学家解决了。因此我们完全有责任将这一完全由中国数学家所创立的方法，应用于中学数学现代化(机械化)的实践。可以说，中学平面几何现代化的根本出路在于机械化，我们只有坚定地走机械化的道路，才能使中学平面几何教学改革走出困境。著名计算机专家、美籍华人王浩教授曾对张奠宙教授说“要使每位中学数学教师都懂得吴方法”。他把实现平面几何机械化的重任寄希望于中国数学教育界。可是我国培养中学数学教师的摇篮——全国高等师范院校数学系，在培养学生的机械化教育方面还是一个空白。1999 年我们在江西师范大学数学系开设了一门“初等几何定理的机器证明”课，以便对高等师范院校数学系学生进行机械化思想的教育。开设“初等几何定理的机器证明”课就是为 21 世纪培养能担任平面几何机械化重任的合格师资，通过该课程的训练，使他们毕业后能以机械化思想积极参与到中学平面几何的教学改革中去，为 21 世纪解决平面几何教学改革这一世界性的难题作出贡献。另外，我们还在江西省临川二中一个班进行让学生在计算机上证明几何定理的实验，该实验正顺利进行，可望 2000 年底结束。希望有更多的中学进行这项实验。只要我们大家共同努力，相信在 21 世纪，中学平面几何现代化(机械化)一定会在我国首先实现。

吴文俊的几何定理的机器证明方法

吴文俊的几何定理的机器证明方法的基本思想

吴文俊院士所创立的几何定理的机器证明方法(在国际上被誉为吴方法)的基本思想是:寻求一个判定算法,去判定一个几何语句的真伪,用算法(计算机能识别的)代替通常的证明。在他最初发表的论文中,就用下面的例子来说明。

例　勾股定理(特殊情形)。

我们将勾股定理看做一个语句(S)。

设 $A_0A_1A_2$ 是一个直角三角形，直角为 $\angle A_1A_0A_2$，设直角边 A_0A_1、A_0A_2 的长分别为 x_2、x_3，斜边的长为 x_4，则有

$$x_2^2+x_3^2=x_4^2。$$

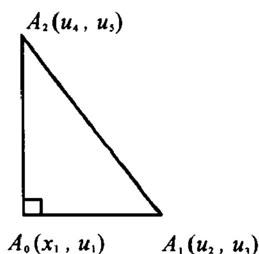


图 6-1

若我们要证明勾股定理，实际上是判定语句(S)的真伪，也就是要寻求一种算法去判定语句(S)是否正确。

为了解决这一问题，首先注意到语句中出现的点在语句假设条件限制下所具有的性质。在直角三角形 $A_0A_1A_2$ 中，A_1 和 A_2 两点可以任意选取，因此这两点的坐标也就可以任意选取，而任意选取的坐标称为自由变元。由于 A_0 为直角处，受直角条件的限制，A_0 的坐标只有一个可以任意选取，另一个坐标受直角这一假设条件所限制，受假设条件限制的坐标称为约束变元。这样 $A_0(x_1,u_1)$、$A_1(u_2,u_3)$、$A_2(u_4,u_5)$，其中 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5 为自由变元，而 x_1 与上面所设的直角边的长和斜边的长 x_2、x_3、x_4 都是约束变元。根据语句(S)中的假设条件，再根据下一节介绍的基本公式，可列出以下的代数方程式：

$A_2A_0\perp A_1A_0$ 可写成

$$f_1=(u_2-x_1)(u_4-x_1)+(u_3-u_1)(u_5-u_1)=0。$$

直角边 A_1A_0 的长可写成

$$f_2=x_2^2-(u_2-x_1)^2-(u_3-u_1)^2=0。$$

直角边 A_2A_0 的长可写成

$$f_3=x_3^2-(u_4-x_1)^2-(u_5-u_1)^2=0。$$

斜边 A_1A_2 的长可写成

$$f_4=x_4^2-(u_4-u_2)^2-(u_5-u_3)^2=0。$$

而语句(S)中的结论部分则可写成

$$g=x_2^2+x_3^2-x_4^2=0。$$

于是判定语句(S)的真伪，就相当于在假设条件 $f_1=0$、$f_2=0$、$f_3=0$、$f_4=0$ 下，寻求一种算法使结论成立，即 $g=0$。

吴文俊院士于 1977 年所创立的吴方法，就是寻找到的一种新算法，吴方法首次在计算机上实现了一大批几何定理的证明。

前面已介绍过，吴方法分为三个步骤，下面我们详细介绍这些步骤。

第一步，将几何问题化为代数形式。

吴方法主要利用解析几何中的坐标法，将几何问题化为代数形式。这一步的关键是选好坐标系，选择好哪些坐标为自由变元，哪些坐标为约束变元。一般地，自由变元都是由与几何命题的假设条件没有关系的、所选取的自由点的坐标所组成，而约束变元是由受几何命题假设条件所限制的点的坐标所组成。用 u_1、u_2……u_n 表示自由变元，用 x_1、x_2……x_m 表示约束变元。根据几何命题的假设条件和结论部分，以及下一节介绍的基本公式及方法，就可将几何问题化为代数形式。

首先将假设条件化为变元方程组的形式

$$\begin{cases} f_1(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0, \\ f_2(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0, \\ \cdots\cdots \\ f_m(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0。\end{cases} \tag{1}$$

其中方程组的左边都是以自由变元和约束变元为自变量的多元多项式。

而结论部分也表示为多元多项式

$$g(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0。\tag{1'}$$

或者是多元多项式组的形式。

第二步，三角化—整序—化为吴升列。

将第一步中假设部分公式(1)按约束变元重新排序，就是将(1)式按约束变元排成三角形形式，也称为吴升列或称为三角化。

所谓三角化，就是通过类似于解线性方程组的高斯消元法的代数方法，将(1)式改写成

$$\begin{cases} f_1^*(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1^*)=0, \\ f_2^*(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1^*,x_2^*)=0, \\ \cdots\cdots \\ f_m^*(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1^*x_2^*,\cdots,x_m^*)=0。 \end{cases}\tag{2}$$

上式与(1)式不同的是方程的顺序不仅重新排列过，而且约束变元的顺序也重新排列过。在(2)式中第一个方程只含有第一个约束变元 x_1^*（可能不是(1)式中的第一个约束变元，而是重新排序后的第一个约束变元）和自由变元。第二个方程只含有第一个约束变元 x_1^* 和第二个约束变元 x_2^*（重新排序后的）以及自由变元……第 m 个方程含有前面 $m-1$ 个约束变元和第 m 个约束变元 x_m^*（重新排序后的）及自由变元。这样，三角化过程实际上是将约束变元排成三角形形状，如图 6-2。

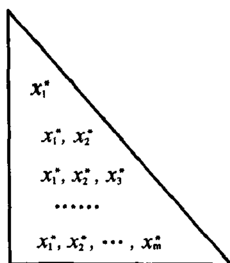


图 6-2

做到这里是不是说第二步就算完成了？不一定。这要由这些多项式中最后一个约束变元的系数来决定。如果最后一个约束变

元的系数中含有其他约束变元的次数都不超过一次，第二步就算完成了；如果有超过一次的就要通过其他代数方法，将其次数降为一次，直到每个方程中最后一个约束变元的系数中所含其他约束变元次数都不超过一次，第二步才算完成。

第三步，作逐次除法——验证结论真伪。

把命题的结论部分写成多项式 $g=0$，将 g 除以 f_m^*（就是通常的多项式之间的除法——辗转相除法），其中 f_m^* 为(2)式中最后一个多项式，并把它们都看做约束变元 x_m^* 的多项式。为了避免商式中出现分式（如果是分式，分母可能为0，计算机就不能识别），要给 g 乘上非零因子 c_1，因此实际上是将 c_1g 除以 f_m^*，将这一结果写成代数等式，即

$$c_1g=a'_1f_m^*+R_m。\tag{3}$$

其中 a'_1 为所得商式，R_m 为余式。

再将余式 R_m 除以 f_{m-1}^*[(2)式中倒数第二个多项式]，把 R_m 和 f_{m-1}^* 都看做约束变元 x_{m-1}^* 的多项式，为了避免商式中出现分式，要给 R_m 乘上非零因式 c_2，将这一结果写成代数等式，即

$$c_2R_m=a'_2f_{m-1}^*+R_{m-1}。\tag{4}$$

其中 a'_2 为所得商式，R_{m-1} 为余式。

再把余式 R_{m-1} 除以 f_{m-2}^*，把 R_{m-1} 和 f_{m-2}^* 都看做约束变元 x_{m-2}^* 的多项式，为了避免商式中出现分式，要给 R_{m-1} 乘上非零因式 c_3，将这一结果写成代数等式，即

$$c_3R_{m-1}=a'_3f_{m-2}^*+R_{m-2}。\tag{5}$$

依同样方法进行下去，最后得

$$c_{m-1}R_3=a'_{m-1}f_2^*+R_2。$$

$$c_mR_2=a'_mf_1^*+R_1。$$

把上面的(3)式乘上 c_2，然后把(4)式代入，得

$$c_1c_2g=a'_1c_2f_m^*+a'_2f_{m-1}^*+R_{m-1}。$$

再把这个式子乘上 c_3，然后把(5)式代入，得

$$c_1c_2c_3g=a'_1c_2c_3f_m^*+a'_2c_3f_{m-1}^*+a'_3f_{m-2}^*+R_{m-2}。$$

依同样方法进行下去，并令 $R_1=R$，最后整理得

$$c_1c_2c_3\cdots c_mg=a_1f_m^*+a_2f_{m-1}^*+\cdots+a_mf_1^*+R。\qquad(6)$$

上面过程中第二步三角化和第三步逐次除法都是可以通过计算机完成，这样要证明一个几何命题，只要将此几何命题的假设部分和结论部分分别化为代数形式(1)和(1′)式，然后输入计算机，通过计算机计算，最后输出结果(6)式。从输出结果(6)式可以看到，在假设条件 $f_1=0,f_2=0\cdots\cdots f_m=0$，以及附加条件(前面介绍的所谓非退化条件)$c_1\neq0,c_2\neq0\cdots\cdots c_n\neq0$ 下，如果输出结果(6)式中余式 $R\equiv0$，一定能得到 $g=0$，即几何命题得证。如果 $R\not\equiv0$，则几何命题不成立。

将基本的几何问题化为代数形式

在平面几何定理的机器证明过程中，有一个很重要的步骤就是将平面几何问题化为代数形式，可通过三角方法、向量方法和坐标方法等方法进行，而吴方法主要是通过解析几何的坐标法去实现的。下面首先介绍用坐标法将平面几何中的一些基本几何问题如垂直、线段相等、三点共线、三线共点、平行等化为代数形式。

线段相等

设点 A、B、C、D 的坐标分别为 $A(x_1,x_2)$、$B(x_3,x_4)$、$C(x_5,x_6)$、$D(x_7,x_8)$，如图 6-3。若线段 AB 与 CD 相等，即 AB

$=CD$，则可以利用解析几何中两点间的距离公式表示为

$$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(x_4-x_2)^2}=\sqrt{(x_7-x_5)^2+(x_8-x_6)^2}。$$

将上式两边平方，并将所有代数式移到等式的左边，得

$$(x_3-x_1)^2+(x_4-x_2)^2-(x_7-x_5)^2-(x_8-x_6)^2=0。\qquad (7)$$

这样公式(7)就将线段相等化为代数形式。

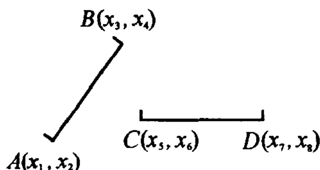


图 6-3

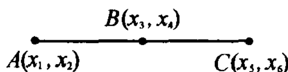


图 6-4

一点是两点的中点

如图 6-4，设点 $B(x_3,x_4)$是点 $A(x_1,x_2)$与点 $C(x_5,x_6)$的中点，则可利用解析几何中的中点坐标公式

$$x_3=\frac{x_1+x_5}{2},\qquad x_4=\frac{x_2+x_6}{2}。$$

而上式可表示为方程组的形式

$$\begin{cases}2x_3-x_1-x_5=0,\\2x_4-x_2-x_6=0。\end{cases}\qquad (8)$$

代数式(8)实际上表示了"B 是 AB 的中点"或特殊形式(退化情形)"A、B、C 三点重合"这样的几何问题。

两直线平行

如图 6-5，要表示 $AB/\!/CD$，可设 AB 所在直线的斜率为 K_{AB}，CD 所在直线的斜率为 K_{CD}，根据两直线平行的充要条件有 $K_{AB}=K_{CD}$，即

$$K_{AB}=\frac{x_4-x_2}{x_3-x_1}=K_{CD}=\frac{x_8-x_6}{x_7-x_5}。$$

整理成方程的形式可表示为

$$(x_4-x_2)(x_7-x_5)-(x_3-x_1)(x_8-x_6)=0。\quad (9)$$

代数等式(9)实际上表示“$AB/\!/CD$”或其特殊形式(退化情形)“点 A 与点 B 重合”或“点 C 与点 D 重合”或“AB 与 CD 在同一直线上”等几何问题。

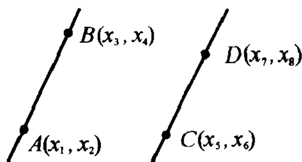


图 6-5

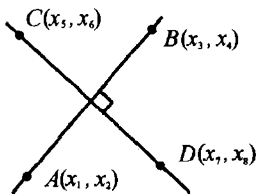


图 6-6

两直线垂直

如图 6-6，表示几何问题 $AB\perp CD$，则可利用两条直线垂直的充要条件 $K_{AB}\cdot K_{CD}=-1$，有

$$K_{AB}\cdot K_{CD}=\frac{x_4-x_2}{x_3-x_1}\cdot\frac{x_8-x_6}{x_7-x_5}=-1。$$

整理成方程的形式，得

$$(x_4-x_2)(x_8-x_6)+(x_3-x_1)(x_7-x_5)=0。\quad (10)$$

代数等式(10)实际上表示“$AB\perp CD$”或其特殊情形“A 与 B 重合”或“C 与 D 重合”等几何问题。

三点共线

如图 6-7，要表示 $A(x_1,x_2)$、$B(x_3,x_4)$、$C(x_5,x_6)$ 三点共一条直线，可利用 AC 所在直线与 BC 所在直线

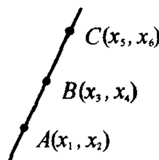


图 6-7

平行的条件来描述，即有

$$(x_4-x_6)(x_1-x_5)-(x_3-x_5)(x_2-x_6)=0。\qquad(11)$$

等式(11)实际上是从 BC 与 AC 的斜率相等条件导出的，它表示“A、B、C 三点共线”或其特殊情形“三点中有两点重合”或“三点重合”等情形。

如果读者熟悉行列式知识，等式(11)还可以写成行列式的形式，即

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_4 & 1 \\ x_5 & x_6 & 1 \end{vmatrix}=0。$$

展开此行列式又可写成

$$(x_1x_4-x_2x_3)-(x_1x_6-x_2x_5)+(x_3x_6-x_4x_5)=0。(11')$$

三直线共点

如图 6-8，AB、CD、EF 三条直线都经过点 G，可以用三个等式来表示，这三个等式分别表示 A、B、G 三点共线，C、D、G 三点共线，以及 E、F、G 三点共线。这样的三个等式可利用等式(11)得到，即

$$\begin{cases}(x_4-x_{14})(x_1-x_{13})-(x_3-x_{13})(x_2-x_{14})=0,\\(x_8-x_{14})(x_5-x_{13})-(x_7-x_{13})(x_6-x_{14})=0,\\(x_{12}-x_{14})(x_9-x_{13})-(x_{11}-x_{13})(x_{10}-x_{14})=0。\end{cases}\qquad(12)$$

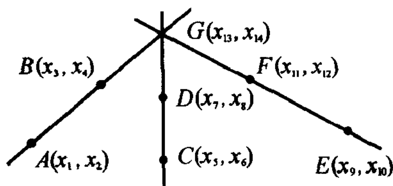


图 6-8

两角相等

如图 6-9，表示$\angle ABC$与$\angle DEF$相等，不但需要它们的度数相等，而且需要它们从始边 BA、ED 旋转到终边 BC、EF 的方向也要相同，也就是要么同为逆时针方向，要么同为顺时针方向。

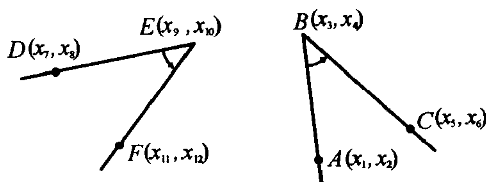


图 6-9

如果一个角从始边旋转到终边的方向是逆时针方向，则这个角的正切值为

$$\frac{K_{终}-K_{始}}{1+K_{终}K_{始}}, \qquad (*)$$

其中 $K_{始}$、$K_{终}$ 分别表示这个角的始边和终边的斜率。

图 6-9 中的$\angle ABC=\angle DEF$（角的方向相同），利用（*）式，它们的正切值应相等，整理得

$$\begin{aligned}&[(x_6-x_4)(x_1-x_3)-(x_2-x_4)(x_5-x_3)]\\&[(x_{11}-x_9)(x_7-x_9)+(x_{12}-x_{10})(x_8-x_{10})]\\&\quad-[(x_{12}-x_{10})(x_7-x_9)-(x_8-x_{10})(x_{11}-x_9)]\\&[(x_5-x_3)(x_1-x_3)+(x_6-x_4)(x_2-x_4)]\\&=0。\end{aligned} \qquad (13)$$

这个代数等式实际上表示“$\angle ABC$与$\angle DEF$的度数相同且旋转方向相同”或“A与B重合”或“C与B重合”或“$\angle ABC$与$\angle DEF$度数互为补角且旋转方向相反”等情形。

点在角平分线上

如图 6-10 设点 P 在$\angle ABC$的平分线上，则$\angle ABP=\angle PBC$。像上述那样，利用(*)式考虑$\angle ABP$的正切值与$\angle PBC$的正切值相等而得到下列等式

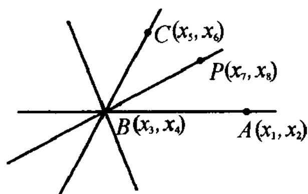


图 6-10

$$
\begin{aligned}
&[(x_8-x_4)(x_1-x_3)-(x_2-x_4)(x_7-x_3)] \\
&[(x_5-x_3)(x_7-x_3)+(x_6-x_4)(x_8-x_4)] \\
&\quad -[(x_6-x_4)(x_7-x_3)-(x_8-x_4)(x_5-x_3)] \\
&[(x_7-x_3)(x_1-x_3)+(x_8-x_4)(x_2-x_4)] \\
&=0。 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

代数等式(14)表示的实际上是“P 在$\angle ABC$ 的角平分线上”，或“P 在$\angle ABC$ 的邻补角的角平分线上”，或“A 与 B 重合”或“C 与 B 重合”或“A 与 C 重合”等情形。

线段的比相等

如图 6-11，设线段 AB 与 CD 的比等于线段 EF 与 GH 的比，即$\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$，则可利用两点间距离公式表示为

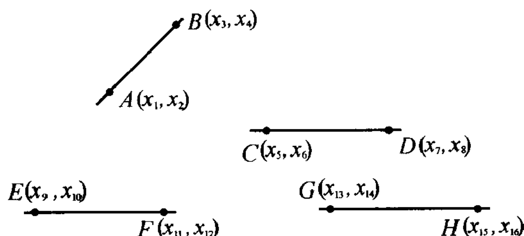


图 6-11

$$[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2][(x_{13}-x_{15})^2+(x_{14}-x_{16})^2]$$
$$-[(x_5-x_7)^2+(x_6-x_8)^2][(x_9-x_{11})^2+(x_{10}-x_{12})^2]$$
$$=0。 \quad (15)$$

这个等式实际上表示“线段 AB 与 GH 的积等于线段 CD 与 EF 的积”，也可表示“A 与 B 重合且 C 与 D 重合”，或“A 与 B 重合且 E 与 F 重合”，或“G 与 H 重合且 C 与 D 重合”，或“G 与 H 重合且 E 与 F 重合”等情形。

一点分两点成定比

如图 6-12，设点 P 分 A、B 两点成定比 λ，即 P 在 A、B 所在的直线上，且有向线段 AP 与有向线段 PB 之比为 λ。当点 P 在 A、B 之间时 λ 为正[如图 6-12(上图)]，当 P 在 A、B 之外时 λ 为负[图 6-12(下图)]。

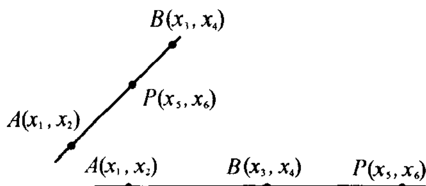


图 6-12

设点 P 分 A、B 成定比 λ，由定比分点公式，有

$$\frac{x_5-x_1}{x_3-x_5}=\lambda,\quad \frac{x_6-x_2}{x_4-x_6}=\lambda。$$

整理成方程形式可表示为

$$\begin{cases} x_5-x_1-\lambda(x_3-x_5)=0, \\ x_6-x_2-\lambda(x_4-x_6)=0。\end{cases} \quad (16)$$

上述代数式实际上表示“P 分 A、B 成定比 λ”，或“A、B、P 三点重合”，或“A 与 B 重合且 P 不与 A、B 重合”等情形。

一点在圆周上

如图 6-13，设点 $P(x_3,x_4)$ 在以点 $O(x_1,x_2)$ 为圆心，r 为半经的圆上，利用圆的方程可表示为

$$(x_3-x_1)^2+(x_4-x_2)^2=r^2。\quad (17)$$

当 r 为零时，这个等式可表示 P 与 O 重合。

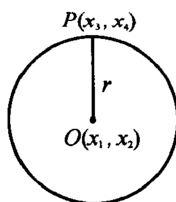


图 6-13

四点共圆

如图 6-14，设 A、B、C、D 四点共圆，这个圆的圆心为 O，半径为 r，则这四点共圆可表示为下列方程组的形式

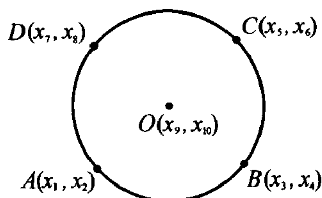


图 6-14

$$\begin{cases}(x_1-x_9)^2+(x_2-x_{10})^2=r^2,\\(x_3-x_9)^2-(x_4-x_{10})^2=r^2,\\(x_5-x_9)^2+(x_6-x_{10})^2=r^2,\\(x_7-x_9)^2+(x_8-x_{10})^2=r^2。\end{cases}\quad (18)$$

也可以利用角的旋转方向及相等互补关系，将四点共圆用前面表示两角相等的式子来表示。在图 6-14 中 A、B、C、D 四点那样的位置情况下，$\angle ABD$ 与 $\angle ACD$ 旋转方向相同且度数相等，$\angle ABC$ 与 $\angle ADC$ 旋转方向相反且互为补角。

上面我们举出了一些基本几何问题化为代数形式的公式，在利用吴方法证明几何问题时会经常用到，到时只要套公

式就行。如果遇到上面没有提到的几何关系时，也可仿照上面的方法，把它们化为代数形式。

一些具体的例子

前面我们详细叙述了吴方法的基本思想及其求解几何命题的三个步骤，下面我们通过几个具体的例子，来说明如何应用该法去求解几何问题。这些例子基本上都可以用手笔解决，但是所用的方法与在计算机上的方法是一致的，只不过要通过软件设计使计算机能识别而去进行计算。

例 1　求证：三角形的三条高共线。

解　如图 6-15，首先选取好坐标轴，以$\triangle ABC$ 的 AB 边所在直线为 x 轴，过点 C 的高线为 y 轴，而过 C 的高与底边 AB 的交点为坐标原点 O，BC 边上的高 AD 与 AB 上的高 CO 的交点 H，设各点的坐标为 $A(u_1,0)$、

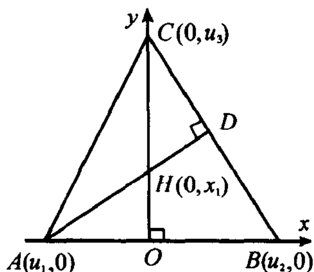


图 6-15

$B(u_2,0)$、$C(0,u_3)$、$H(0,x_1)$。其中 A、B、C 三点为自由点，所以它们的坐标 u_1、u_2、u_3 为自由变元，而两高的交点 H 受假设条件所限制，所以 x_1 为约束变元。

只要能证明 $BH\perp AC$，即证明了三高交于一点。下面用吴方法来证明此题。

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：$AH\perp BC$，由本章公式(10)，得

$f_1=(x_1-0)(u_3-0)+(0-u_1)(0-u_2)=x_1u_3+u_1u_2=0$。

结论部分：$BH\perp AC$，由本章公式(10)，得

$g=(x_1-0)(u_3-0)+(0-u_2)(0-u_1)=x_1u_3+u_1u_2=0$。

第二步，三角化。

由于假设条件只有一个方程和一约束变元，已经三角化了。

第三步，作逐步除法。

由于 f_1 与 g 完全相等，因此将 g 除以 f_1 得　$g=f_1+R$。其中商式为 1，而 $R=0$，故命题得证。

例 2　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

解　如图 6-16，首先选取好坐标系，以直角三角形的两直角边 AO 与 BO 分别为 x 轴和 y 轴，直角顶点为原点 O，取 D 为斜边 AB 的中点，并设它们的坐标分别为 $O(0,0)$、$A(2u_1,0)$、$B(0,2u_2)$（这里设 $2u_1$、$2u_2$，是由中点条件所定，以便于计算）以及 $D(x_1,x_2)$。其中 O、A、B 三点是任意选取的，所以它们的坐标中的 u_1、u_2 是自由变元，而中点 D 受假设条件所限，所以其坐标中的 x_1、x_2 为约束变元。下面用吴方法求解此题。

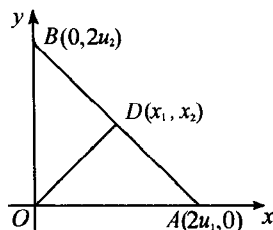


图 6-16

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：由于 D 是 AB 的中点，故由本章公式(8)，得

$$f_1=x_1-u_1=0,$$

$$f_2=x_2-u_2=0。$$

结论部分：要证明 $OD=BD$，由本章公式(7)，得

$$g=(x_1^2+x_2^2)-(u_1^2+u_2^2)=x_1^2+x_2^2-u_1^2-u_2^2$$

$$=(x_1-u_1)(x_1+u_1)+(x_2-u_2)(x_2+u_2)=0。$$

第二步，三角化。

由于 f_1 中只含有约束变元 x_1，而 f_2 又只含有约束变元 x_2。因此 f_1、f_2 本身就已经三角化了。因此可令

$$f_1^*=f_1=x_1-u_1=0, f_2^*=f_2=x_2-u_2=0。$$

第三步，作逐步除法。

将 g 除以 f_2^*，即

$$\begin{array}{r|l} & x_2+u_2 \\ \hline x_2-u_2 & (x_2-u_2)(x_2+u_2)+(x_1-u_1)(x_1+u_1) \\ & (x_2-u_2)(x_2+u_2) \\ \hline & (x_1-u_1)(x_1+u_1) \end{array}$$

亦即

$$g=(x_2+u_2)f_2^*+R_2, \qquad (19)$$

其中 $R_2=(x_1-u_1)(x_1+u_1)$。

以 R_2 除以 f_1^*，类似地得

$$R_2=(x_1+u_1)f_1^*+R, \qquad (20)$$

其中 $R\equiv0$。若将(20)式代入(19)式，得

$$g=(x_1+u_1)f_1^*+(x_2+u_2)f_2^*+R,$$

其中 $R\equiv0$。命题得证。

例 3　求证：对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

解　如图 6-17，首先选取坐标系，使平行四边形 $ABCD$ 一个顶点 A 为原点，AB 边所在直线为 x 轴，垂直 AB 的直线为 y 轴，设 $ABCD$ 各个顶点的坐标分别为 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$C(u_2,x_1)$、$D(x_2,x_1)$，其中 u_1、u_2 为自由变

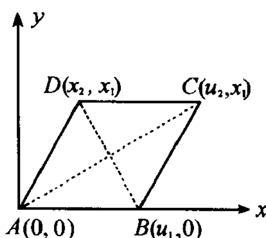


图 6-17

元，x_1、x_2 为约束变元。由于 $ABCD$ 是平行四边形，所以点 C 的纵坐标与点 D 的纵坐标相等。下面用吴方法证明此题。

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：由于 $ABCD$ 是平行四边形，故 $AD /\!/ BC$，由本章公式(9)，有

$$f_1=x_1(u_2-u_1)-x_2x_1=0。\qquad (21)$$

由假设条件 $AC\perp BD$，故由本章公式(10)，有

$$f_2=x_1^2+u_2(x_2-u_1)=0。\qquad (22)$$

结论部分：要证 $ABCD$ 为菱形，即要证明 $AB=AD$，由本章公式(7)，有

$$g=u_1^2-(x_1^2+x_2^2)=0。$$

第二步，三角化。

由于 $x_1\neq 0$，在(21)式中消去 x_1，得

$$f_1^*=-x_2+u_2-u_1=0。$$

而(22)式可写成

$$f_2^*=f_2=x_1^2+u_2x_2-u_1u_2=0。$$

这样就把 f_1^* 看做只有 x_2 的方程，这时 x_2 就被看做是第一个约束变元；而 f_2^* 看做是只有 x_1 与 x_2 的方程，这时 x_1 被看做是第二个约束变元，假设部分就三角化了。

第三步，作逐次除法。

把 g 除以 f_2^*（把它们都看做是 x_1 的多项式），得

$$\begin{array}{r|l} & \quad -1 \\ x_1^2+u_2x_2-u_1u_2 & -x_1^2-x_2^2+u_1^2 \\ & -x_1-u_2x_2+u_1u_2 \\ \hline & \quad -x_2^2+u_2x_2+u_1^2-u_1u_2 \end{array}$$

即

$$g=-f_2^*+R_2,\qquad (23)$$

其中　$R_2 = -x_2^2 + u_2x_2 + u_1^2 - u_1u_2$。

再把 R_2 除以 f_1^*，得

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x_2 - u_1 \\
\cline{2-2}
-x_2 + u_2 - u_1 & -x_2^2 + u_2x_2 + u_1^2 - u_1u_2 \\
 & -x_2^2 + u_2x_2 - u_1x_2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad u_1x_2 + u_1^2 - u_1u_2 \\
 & \qquad u_1x_2 + u_1^2 - u_1u_2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

即

$$R_2 = (x_2 - u_1)f_1^* + R, \tag{24}$$

其中 $R \equiv 0$。

将(24)式代入(23)式，得

$$g = -f_2^* + (x_2 - u_1)f_1^* + R。$$

由于 $f_1^* = 0, f_2^* = 0, R \equiv 0$，则必有 $g = 0$。命题得证。

例 4　垂直于弦的直径平分此弦。

解　如图 6-18，首先选取坐标系，以圆心 O 为原点，任取两条互相垂直的直径为 x 轴和 y 轴，在圆上任取两点 A、B，它们的坐标为 $A(u_1, u_2)$、$B(u_3, u_4)$，过 O 作 AB 的垂线交 AB 于 D，点 D 的坐标为 $D(x_1, x_2)$。下面用吴方法来证明此题。

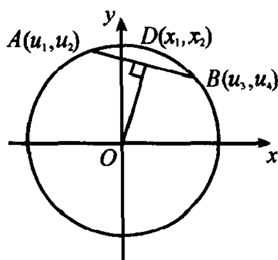


图 6-18

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：由假设 $OD \perp AB$，利用本章公式(10)，得

$f_1 = (u_3 - u_1)(x_1 - 0) + (u_4 - u_2)x_2 = 0$。

由同圆的半径相等，故 $OA=OB$。利用本章公式(7)，得

$f_2=u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2=0$。

结论部分：要证明 $AD=BD$，由本章公式(7)，有

$g=(u_1-x_1)^2+(u_2-x_2)^2-(u_3-x_1)^2-(u_4-x_2)^2=0$。

第二步，三角化。

由于只有 f_1 含有约束变元，所以可认为它已三角化了。将结论 $g=0$ 变形为

$$\begin{aligned} g &=u_1^2-2u_1x_1+x_1^2+u_2^2-2u_2x_2+x_2^2 \\ &\quad -u_3^2+2u_3x_1-x_1^2-u_4^2+2u_4x_2-x_2^2 \\ &=2[(u_3-u_1)x_1+(u_4-u_2)x_2]+u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2=0。\end{aligned}$$

第三步，逐步除法。

将 g 除以 f_1 得

$$g=2f_1+R_2, \tag{25}$$

其中 $R_2=u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2$。

再将 R_2 除以 f_2，由于 $R_2=f_2$，有

$$R_2=f_2+R,$$

其中 $R\equiv0$。再将上式 R_2 代入(25)式，得

$$g=2f_1+f_2+R,$$

其中 $R\equiv0$。命题得证。

例 5 在△ABC 中，D 是 AB 的中点，$DE\parallel BC$，求证：E 是 AC 的中点。(中位线定理)

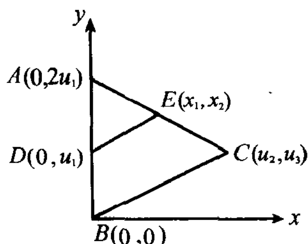


图 6-19

解 如图 6-19，首先选取坐标系，以△ABC 的 AB 边为 y 轴，点 B 为原点，则可设 $A(0,2u_1)$、

$B(0,0)$、$C(u_2,u_3)$、$D(0,u_1)$、$E(x_1,x_2)$。其中设$A(0,2u_1)$是为计算方便。其中 u_1、u_2、u_3 为自由变元，x_1、x_2 为约束变元。下面用吴方法证明此题。

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：由 $DE /\!/ BC$，根据本章公式(9)，有

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (x_2-u_1)(u_2-0)-(x_1-0)(u_3-0) \\
&= u_2x_2-u_3x_1-u_1u_2=0。
\end{aligned} \tag{26}
$$

再由 A、E、C 三点共线，根据本章公式(11)，有

$$
\begin{aligned}
f_2 &= (x_2-2u_1)(u_2-0)-(x_1-0)(u_3-2u_1) \\
&= u_2x_2-u_3x_1+2u_1x_1-2u_1u_2=0。
\end{aligned} \tag{27}
$$

结论部分：要证 $AE=EC$，根据本章公式(7)，有

$$
\begin{aligned}
g &= x_1^2+(x_2-2u_1)^2-(u_2-x_1)^2-(u_3-x_2)^2 \\
&= x_1^2+x_2^2-4u_1x_2+4u_1^2-u_2^2+2u_2x_1-x_1^2 \\
&\quad -u_3^2+2u_3x_2-x_2^2 \\
&= -4u_1x_2+2u_3x_2+2u_2x_1+4u_1^2-u_2^2-u_3^2。
\end{aligned}
$$

第二步，三角化。

令

$$
\begin{aligned}
f_1^* &= f_2-f_1=2u_1x_1-u_1u_2=0, \\
f_2^* &= f_2=u_2x_2-u_3x_1+2u_1x_1-2u_1u_2。
\end{aligned}
$$

第三步，作逐次除法。

将 g 除以 f_2^*，并将 g 和 f_2^* 都看做约束变元 x_2 的多项式，为了避免商式中出现分式，实际上是将 u_2g 除以 f_2^*，得

$$
u_2g=2(u_3-2u_1)f_2^*+R_2, \tag{28}
$$

其中

$$
R_2=2(u_2^2+u_3^2-4u_1u_3+4u_1^2)x_1-4u_1^2u_2-u_2^3-u_2u_3^2+4u_1u_2u_3。
$$

再将 R_2 除以 f_1^*，把它们都看做 x_1 的多项式。为了避免商式中出现分式，实际上是将 u_1R_2 除以 f_1^*，即

$$u_1R_2=(u_1^2+u_3^2-4u_1u_3+4u_1^2)f_1^*+R,\qquad(29)$$

其中 $R\equiv0$。

将(28)$\times u_1$，再将(29)代入，得

$$u_1u_2g=2u_1(u_3-2u_1)f_2^*+(u_1^2+u_3^2-4u_1u_3+4u_1^2)f_1^*+R。$$

当 $u_1\neq0,u_2\neq0$ 时，由 $f_2^*=0,f_1^*=0,R\equiv0$，必得 $g=0$，命题得证。

其中 $u_1\neq0,u_2\neq0$ 为非退化条件。

当 $u_1=0$ 时，点 A 与点 B 重合，ABC 不成为三角形；

当 $u_2=0$ 时，则点 C 在 AB 边上，因此此命题在 $u_1\neq0$，$u_2\neq0$的条件下才能成立。

例 6 求证：等腰梯形两底角相等。

解 如图 6-20，选取坐标系，以等腰梯形底边一顶点 A 为原点，底边为 x 轴，则可设 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$C(u_2,u_3)$、$D(x_1,u_3)$，其中 u_1、u_2、u_3 为自由变元。x_1 为约束变元，现在用吴方法证明此题。

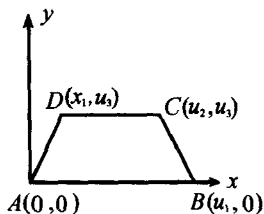


图 6-20

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：由于 $AD=BC$，由本章公式(7)，得

$$\begin{aligned}f_1&=x_1^2+u_3^2-(u_2-u_1)^2-u_3^2\\&=(x_1+u_2-u_1)(x_1-u_2+u_1)=0。\end{aligned}\qquad(30)$$

又因 AD 与 BC 不平行(根据梯形定义)，故由本章公式(9)，有

$$(u_3-0)(u_2-u_1)-(x_1-0)(u_3-0)=u_3(u_2-u_1-x_1)\neq0。$$

假设 $u_3\neq0$，则 $x_1-u_1+u_2\neq0$，而由(30)式 $f_1=0$，结合这两个条件必有

$$f_2=x_1+u_2-u_1=0。$$

结论部分：由本章两角相等公式(13)，有

$$\begin{aligned} g &=[(u_3-0)(u_1-0)-(0-0)(x_1-0)][(0-u_1)(u_2-u_1)+(0-0)(u_3-0)]-[(0-0)(u_2-u_1)-(u_3-0)(0-u_1)][(x_1-0)(u_1-0)+(u_3-0)(0-0)] \\ &=u_1u_3[-u_1(u_2-u_1)]-u_1u_3(x_1u_1) \\ &=-u_1^2u_3(x_1+u_2-u_1) \\ &=0。\end{aligned}$$

由于只有一个变元，本身就已三角化了，又因为 $u_1\neq 0$(B 与 A 不重合)，$u_3\neq 0$(DC 与 AB 不在同一直线上)，由 $f_2=0$ 可直接推得 $g=0$(由于 $f_2=g$，故 g 除以 f_2 所得余式 $R\equiv 0$)。命题得证。

例 7　求证：三角形的两条中线的交点分中线成 2∶1。

解　如图 6-21。首先选取坐标系，以三角形一顶点 A 为原点，AB 所在的边为 x 轴，为了减少计算，可设 $A(0,0)$、$B(2u_1,0)$、$C(2u_2,2u_3)$，BC 上的中点 $D(u_1+u_2,u_3)$，AC 边上的中点 $E(u_2,u_3)$，两中线的交点为$G(x_1,x_2)$。其中 u_1、u_2、u_3 为自由变元，x_1、x_2 为约束变元。下面用吴方法证明此题。

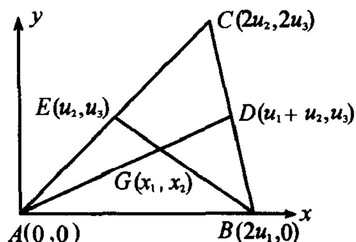


图 6-21

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：由于 B、G、E 三点共线，根据本章公式(11)，可表示为

$$f_1=(x_2-u_3)(2u_1-u_2)-(x_1-u_2)(0-u_3)$$

$$=2u_1x_2-2u_1u_3-u_2x_2+u_3u_3+u_3x_1-u_2u_3$$

$$=(u_2-2u_1)x_2+u_3(x_1-2u_1)=0。\quad (31)$$

再由 A、G、D 三点共线，根据本章公式(11)，有

$$f_2=x_2(u_1+u_2)-x_1u_3=0。\quad (32)$$

结论部分：要证点 G 分 AD 成 2∶1，由定比分点公式[本章公式(16)]，有

$$g_1=x_1-2(u_1+u_2-x_1)=0,\quad (33)$$

$$g_2=x_2-2(u_3-x_2)=0。\quad (34)$$

点 G 分 BE 成 2∶1，同样有

$$g_3=x_1-2u_1-2(u_2-x_1)=0,\quad (35)$$

$$g_4=x_2-2(u_3-x_2)=0。\quad (36)$$

由于(33)与(36)相同，(34)与(36)相同，所以只要能证明(33)和(34)两式成立即可。

第二步，三角化。

由(31)×(u_1+u_2)－(32)×$(2u_1-u_2)$，消去约束变元 x_2，得

$$f_1^*=u_1u_3[3x_1-2(u_1+u_2)]=0。$$

由于 $u_1\neq0,u_3\neq0$，则 $f_1^*=3x_1-2(u_1+u_2)=0$。

令 $f_2^*=f_2=x_2(u_1+u_2)-x_1u_3=0$。

这样 f_1^* 只含有一个约束变元 x_1，f_2^* 含有约束变元 x_1 和 x_2，而且 f_1^* 中 x_1 的系数和 f_2^* 中 x_2 的系数含其他约束变元的次数不高于一次，这样就完成了三角化。

第三步，作逐次除法。

不妨先看(34)式，并把它看做最后一个约束变元 x_2 的多项式，即令

$$g_2=x_2-2(u_3-x_2)=3x_2-2u_3。$$

用 f_2^* 去除 g_2，并把它们都看做 x_2 的多项式。为了避免

两式相除所得的商中出现分式，需用 f_2^* 去除 $(u_1+u_2)g_2$，即

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3 \\ x_2(u_1+u_2)-x_1u_3 & 3x_2(u_1+u_2)-2u_3(u_1+u_2) \\ & 3x_2(u_1+u_2)-3x_1u_3 \\ \hline & \qquad 3x_1u_3-2u_3(u_1+u_2) \end{array}$$

于是得到

$$(u_1+u_2)g_2=3f_2^*+R_2, \tag{37}$$

其中 $R_2=3x_1u_3-2u_3(u_1+u_2)$。

再用 f_1^* 去除 R_2(把它们都看做约束变元 x_1 的多项式)，为了避免商式中出现分式，实际上是用 f_1^* 去除 u_1R_2，即

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ 3u_1u_3x_1-2u_1u_3(u_1+u_2) & 3x_1u_1u_3-2u_1u_3(u_1+u_2) \\ & 3x_1u_1u_3-2u_1u_3(u_1+u_2) \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

于是得到

$$u_1R_2=f_1^*+R, \tag{38}$$

其中 $R\equiv 0$。

现将(37)式两边同乘以 u_1，然后将(38)式代入得

$$u_1(u_1+u_2)g_2=3u_1f_2^*+f_1^*+R。$$

上式中由假设 $f_1^*=0, f_2=0$，而所得余式 $R\equiv 0$，因此当 $u_1\neq 0, (u_1+u_2)\neq 0$ 时，必有 $g_2=0$。

上面的 $u_1\neq 0, u_3\neq 0$ 是显然的，否则点 B 与点 A 重合或点 C 在 AB 上，这两种情形都不能成立三角形。因此当 $u_1=0, u_3=0$ 时，结果不成立。

当 $u_1+u_2=0$，即 $u_1=-u_2$ 时点 B 与点 C 分别位于纵轴的左右两侧，而距 y 轴的距离相等，这是命题的特殊情况，

如图 6-22。用类似的方法可证命题同样成立。

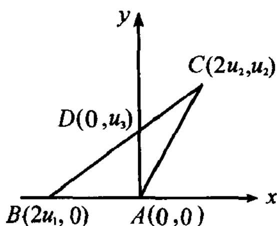


图 6-22

其次，再看(33)式是否成立。把 g_1 看做约束变元 x_1 的多项式

$$g_1=3x_1-2(u_1+u_2)。$$

将 g_1 除以 f_1^*，并把它们都看做 x_1 的多项式，得

$$g_1=0\cdot f_2^*+f_1^*+R,$$

其中 $R\equiv 0$。这样从 $f_1^*=0, f_2^*=0$，可推得(33)式即 $g_1=0$。

命题得证。

从上面例子可看出，如果结论部分是方程组的形式，用吴方法也可证明。另外，对退化条件的讨论是完全必要的。在此例中，对有些退化条件，如 $u_1=0, u_3=0$，命题不成立；对有些退化条件，如 $u_1+u_2=0$，命题成立。

例 8　求证：平行四边形对角线互相平分。

解　如图 6-23，首先选取好坐标系，以平行四边形顶点 A 为原点，以 AB 边为 x 轴，则可设各点坐标 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$C(u_2,u_3)$、$D(x_1,u_3)$，对角线 BD 与 AC 的交点为 $E(x_2,x_3)$，其中 u_1、u_2、u_3 为自由变元，x_1、x_2、x_3 是受假设条件限制的约束变元。下面用吴方法证明此题。

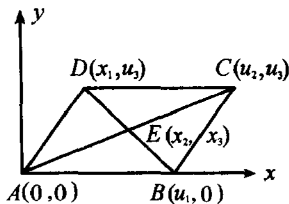


图 6-23

第一步，将几何问题化为代数形式。

假设部分：由于 $AD/\!/BC$，由本章公式(9)，可得

$$f_1=(u_3-0)(u_2-u_1)-(x_1-0)(u_3-0)$$
$$=u_3(u_2-u_1)-x_1u_3=0。$$

而条件 $DC /\!/ AB$ 在选取坐标系时已经用过(点 C 与点 D 的纵坐标相等)。

由 B、E、D 三点共线,根据本章公式(11),得

$$f_2=(x_3-0)(u_1-x_1)-(x_2-u_1)(0-u_3)$$
$$=x_3(x_1-u_1)-u_3(x_2-u_1)=0。$$

同样地,由 A、E、C 三点共线,可得

$$f_3=x_3u_2-x_2u_3=0。$$

结论部分:要证 $EA=EC$,根据本章公式(7),可得

$$g_1=x_2^2+x_3^2-(u_2-x_2)^2-(u_3-x_3)^2$$
$$=u_2^2-2u_2x_2+u_3^2-2u_3x_3=0。$$

同样地,由 $EB=ED$,可得

$$g_2=(x_2-u_1)^2+x_3^2-(x_1-x_2)^2+(u_3-x_3)^2$$
$$=-2u_1x_2+u_1^2-x_1^2+2x_1x_2-u_3^2+2u_3x_3=0。$$

第二步,三角化。

由于 f_1 只含有一个约束变元 x_1,在 $u_3\neq 0$ 条件下,f_1 可写成 f_1^*,即

$$f_1^*=u_2-u_1-x_1=0。$$

而 f_2、f_3 都包含约束变元 x_2、x_3,从中消去 x_2,将 f_2-f_3,得

$$f_2^*=x_3(x_1-u_1-u_2)+u_1u_3=0。$$

而令 $f_3^*=f_3$ 得

$$f_3^*=x_3u_2-x_2u_3=0。$$

这样整理后,f_1^*、f_2^*、f_3^* 就成为吴升列(三角化)。

第三步,作逐次除法。

首先验证由 $f_1^*=0$,$f_2^*=0$,$f_3^*=0$,可推出 $g_1=0$ 成立。

将 g_1 除以 f_3^*（把它们都看做 x_2 的多项式），为避免商式中出现分式，实际上是用 f_3^* 去除 $u_3 g_1$，得

$$u_3 g_1 = 2u_2 f_3^* + R_3, \tag{39}$$

其中 $R_3 = -2(u_2^2+u_3^2)x_3 + u_3(u_2^2+u_3^2)$。

再把 R_3 除以 f_2^*（把它们都看做 x_3 的多项式），为了避免商式中出现分式，实际上是用 $(x_1-u_1-u_2)R_3$ 除以 f_2^*，得

$$(x_1-u_1-u_2)R_3 = -2(u_1^2+u_3^2)f_2^* + R_2, \tag{40}$$

其中 $R_2 = 2u_1u_3(u_2^2+u_3^2) + u_3(u_2^2+u_3^2)(x_1-u_1-u_2)$。

再把 R_2 除以 f_1^*（把它们都看做 x_1 的多项式），得

$$R_2 = -u_3(u_2^2+u_3^2)f_1^* + R, \tag{41}$$

其中 $R \equiv 0$。

在(39)两边同乘以 $(x_1-u_1-u_2)$，得

$$u_3(x_1-u_1-u_2)g_1 = 2u_2(x_1-u_1-u_2)f_3^* + (x_1-u_1-u_2)R_3。$$

再将(40)式代入上式，得

$$u_3(x_1-u_1-u_2)g_1 = 2u_2(x_1-u_1-u_2)f_3^* - 2(u_2^2+u_3^2)f_2^* + R_2。$$

再将(41)式代入上式得

$$u_3(x_1-u_1-u_2)g_1 = 2u_2(x_1-u_1-u_2)f_3^* - 2(u_2^2+u_3^2)f_2^* - u_3(u_2^2+u_3^2)f_1^* + R。$$

其中 $R \equiv 0$。由假设 $f_1^*=0, f_2^*=0, f_3^*=0$，因此在非退化条件 $u_3 \neq 0$ 和 $x_1-u_1-u_2 \neq 0$ 下，必有 $g_1=0$。

其中 $u_3 \neq 0$ 的几何意义是 DC 与 AB 不在同一直线上。由 $f_1^*=0$ 即得 $x_1=u_2-u_1$，因此 $x_1-u_1-u_2 \neq 0$ 就等价于 $u_1 \neq 0$，它的几何意义是点 B 不与点 A 重合。因此，对于一般平行四边形来说这两个非退化条件是成立的。

因此，在非退化条件 $u_3 \neq 0$ 和 $u_1 \neq 0$ 下，$g_1=0$ 是成立的。

下面再验证在 $f_1^*=0, f_2^*=0, f_3^*=0$ 的条件下，$g_2=0$ 也

成立。

将 g_2 除以 f_3^*（把它们都看做 x_2 的多项式），为了避免在商式中出现分式，实际上是用 f_3^* 去除 u_3g_2，得

$$u_3g_2=-(-2u_1+2x_1)f_3^*+R_3,$$

其中 $R_3=(-2u_1u_2+2u_2x_1+2u_3^2)x_3+u_1^2u_3-u_3x_1^2-u_3^3$。

再将 R_3 除以 f_2^*（把它们都看做 x_3 的多项式），为了避免在商式中出现分式，实际上是将 $(x_1-u_1-u_2)R_3$ 除以 f_2^*，得

$$(x_1-u_1-u_2)R_3=(-2u_1u_2+2u_2x_1+2u_3^2)f_2^*+R_2,$$

其中

$$\begin{aligned}R_2&=-u_1u_3(-2u_1u_2+2u_2x_1+2u_3^2)\\&\quad+(x_1-u_1-u_2)(u_1^2u_3-u_3x_1^2-u_3^2)\\&=-u_3x_1^3+(u_1u_3+u_2u_3)x_1^2+(-2u_1u_2u_3+u_1^2u_3-u_3^3)x_1\\&\quad+(-u_1^3u_3+u_1^2u_2u_3-u_1u_3^3+u_2u_3^3)。\end{aligned}$$

最后把 R_2 除以 f_1^*（把它们都看做 x_1 的多项式），得

$$R_2=(u_3x_1^2-2u_1u_3x_1+u_1^2u_3+u_3^3)f_1^*+R,$$

其中 $R\equiv0$。

于是在 $u_3\neq0$ 及 $x_1-u_1-u_2\neq0$ 的非退化条件下，能推出 $g_2=0$。其中 $u_3\neq0$ 和 $x_1-u_1-u_2\neq0$ 的几何意义上面已经讨论过。

这样，在非退化条件 $u_1\neq0, u_3\neq0$ 下，当 $f_1^*=0, f_2^*=0, f_3^*=0$ 时，能推得 $g_2=0$，命题得证。

张景中的消点算法

解几何问题的两把“利剑”

张景中院士将古老的面积方法加以改造，使之焕发青春。面积方法在证明几何问题时，游弋自如，特别是共边定理和共角定理，它们就像两把利剑，使许多几何难题迎刃而解。

共边定理及其应用

所谓共边三角形，就是在两个三角形中有一条公共边，例如$\triangle ABP$与$\triangle BCA$中就有一条公共边AB，这样$\triangle ABP$与$\triangle BCA$便是一对共边三角形。共边三角形

是处处存在的，它比全等三角形、相似三角形更为广泛。在图 7-1 中的共边三角形就有 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABP$、$\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$、$\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 等 18 对，可见共边三角形是很容易找到的。不但从图上一眼就能看出那两个三角形是共边三角形，不看图，光看顶点的字母也行，在两个三角形的三对顶点中，如果有两对顶点字母相同，它们便是一对共边三角形。

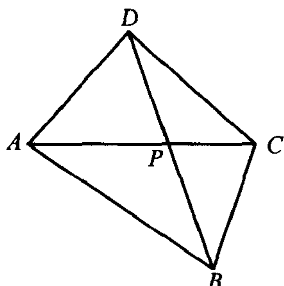


图 7-1

基本命题 在 $\triangle ABC$ 的 AB 边上有一点 M，如果 $AM=\lambda AB$，则 $S_{AMC}=\lambda S_{ABC}$，即共高三角形面积之比等于底之比。即有

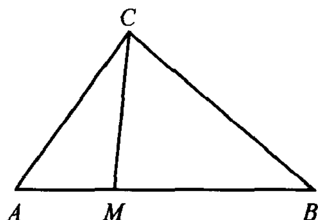


图 7-2

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{AM}{AB}=\lambda$$

或 $$\frac{S_{BMC}}{S_{ABC}}=\frac{BM}{AB}=\frac{AB-AM}{AB}=1-\lambda$$

或 $$\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AB-AM}=\frac{\lambda}{1-\lambda}。$$

基本命题很容易从面积公式得到。今后用 S_{ABC} 表示 $\triangle ABC$ 的面积。

共边定理 若直线 PQ 和直线 AB 交于点 M，则 $\frac{S_{PAB}}{S_{QAB}}=\frac{PM}{QM}$。

证明 共边三角形一般如图 7-3 所画的四种情形。

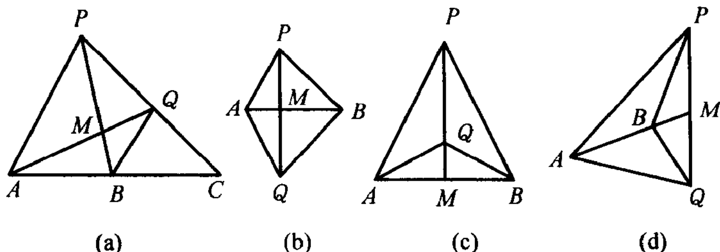


图 7-3

下面我们利用基本命题来证。

$$\frac{S_{PAB}}{S_{QAB}}=\frac{S_{PAB}}{S_{PAM}}\cdot\frac{S_{PAM}}{S_{QAM}}\cdot\frac{S_{QAM}}{S_{QAB}}=\frac{AB}{AM}\cdot\frac{PM}{QM}\cdot\frac{AM}{AB}$$

$$=\frac{PM}{QM}。$$

可见，基本命题是共边定理的特殊情形。

由于共边三角形处处存在，因此应用共边定理解题时方法也是多样的。

例 1　凸四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 AB、CD 的中点，直线 MN 分别与直线 BC、AD 交于 P、Q，如图 7-4。求证：$\frac{AQ}{DQ}=\frac{BP}{CP}$。

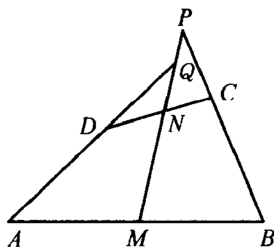


图 7-4

证法 1　$\frac{AQ}{DQ}=\frac{S_{AMN}}{S_{DMN}}$　　(共边定理)

$=\frac{S_{BMN}}{S_{CMN}}$　　(由于 M、N 为中点)

$=\frac{BP}{CP}$。　　(共边定理)

证法 2　作辅助线 BQ、CQ，则

$$\frac{AQ}{DQ}=\frac{S_{AMQ}}{S_{DMQ}}\quad（共边定理）$$

$$=\frac{S_{BMQ}}{S_{CMQ}}\quad（由于 M、N 是中点）$$

$$=\frac{BP}{CP}。（共边定理）$$

证法 3 作辅助线 PD、PA，则

$$\frac{AQ}{DQ}=\frac{S_{AMP}}{S_{DMP}}\quad（共边定理）$$

$$=\frac{S_{BMP}}{S_{CMP}}\quad（由于 M 是中点）$$

$$=\frac{BP}{CP}。\quad（共边定理）$$

例 2 在$\triangle ABC$的两边AC、BC上各取一点M、N，AN与BM交于点P，已知$AM=\lambda AC$，$BN=\mu BC$。求$\frac{PN}{AP}$。

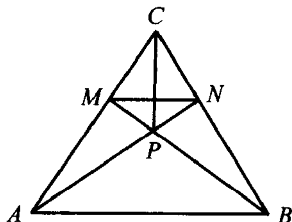


图 7-5

解法 1 设 $S_{ABC}=s$，则

$$\frac{PN}{AP}=\frac{S_{NBM}}{S_{ABM}}\quad（共边定理）$$

$$=\frac{S_{NBM}}{S_{CBM}}\cdot\frac{S_{CBM}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{ABC}}{S_{ABM}}\quad（分子分母同乘一个等量）$$

$$=\frac{\mu S_{CBM}}{\lambda s}\quad（基本命题和已知条件）$$

$$=\frac{\mu(1-\lambda)s}{\lambda s}\left[由于 S_{CBM}=S_{ABC}-S_{ABM}=\left(1-\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}\right)S_{ABC}=(1-\lambda)s\right]$$

$$=\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda}。$$

解法 2 由于

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}}=\frac{AM}{MC}=\frac{\lambda}{1-\lambda},\quad \frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}=\frac{BN}{NC}=\frac{\mu}{1-\mu},\tag{1}$$

故 $$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}}=\frac{S_{PAB}+S_{PBC}+S_{PAC}}{S_{PBC}}$$

$$=\frac{\lambda}{1-\lambda}+1+\frac{\lambda(1-\mu)}{\mu(1-\lambda)}。\tag{2}$$

又因为 $$\frac{AP}{PN}=\frac{AN-PN}{PN}=\frac{AN}{PN}-1$$

$$=\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}}-1\qquad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{\lambda(1-\mu)}{\mu(1-\lambda)}\quad\text{（将(1)式和(2)式代入）}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu(1-\lambda)},$$

所以 $$\frac{PN}{AP}=\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda}。$$

解法 3 $$\frac{PN}{AP}=\frac{S_{PNB}}{S_{PAB}}\qquad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{S_{PNB}}{S_{PCB}}\cdot\frac{S_{PCB}}{S_{PAB}}$$

$$=\frac{BN}{BC}\cdot\frac{MC}{AM}\qquad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda}。\qquad\text{（由基本命题和已知条件）}$$

解法 4 $$\frac{PN}{AP}=\frac{S_{MPN}}{S_{MAP}}\qquad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{S_{MPN}}{S_{MPC}}\cdot\frac{S_{MPC}}{S_{MAP}}$$

$$=\frac{BN}{BC}\cdot\frac{MC}{AM}\qquad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda}。\qquad\text{（由基本命题和已知条件）}$$

解法 5 $$\frac{PN}{AP}=\frac{S_{CPN}}{S_{CAP}}\qquad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{S_{CPN}}{S_{CPB}}\cdot\frac{S_{CPB}}{S_{APB}}\cdot\frac{S_{APB}}{S_{CAP}}$$

$$=\frac{CN}{BC}\cdot\frac{MC}{AM}\cdot\frac{BN}{CN}\qquad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{BN}{AC}\cdot\frac{MC}{AM}$$

$$=\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda}。$$

例 3　如图 7-6，在$\triangle ABC$的两边 AC、AB 的延长线上分别取 E、F。连 BE、CF 交于 P，连 AP 交 BC 于 D。

求证：$\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}-\frac{PD}{AD}=1$。

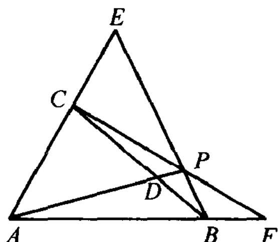


图 7-6

解　$\frac{PE}{BE}=\frac{S_{PAC}}{S_{BAC}}$。（共边定理）

$\frac{PF}{CF}=\frac{S_{PAB}}{S_{CAB}}$。（共边定理）

$\frac{PD}{AD}=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$。（共边定理）

将上面三式相加减，得

$$\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}-\frac{PD}{AD}$$

$$=\frac{S_{PAB}+S_{PAC}-S_{PBC}}{S_{ABC}}$$

$$=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1。$$

例 4　凸四边形 $ABCD$ 的两对角线为 AC、BD，在 AB、CD 两边上分别取 M、N 使 $BM=2MA$，$CN=2ND$，连 MN 分别

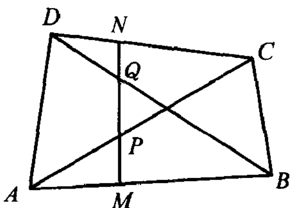


图 7-7

与 AC、BD 交于 P、Q，如图 7-7。

求证： $BQ \cdot CP = 4DQ \cdot AP$。

证明　只要能证明 $\frac{BQ}{DQ} = 4\frac{AP}{CP}$ 就可以了。

$$\frac{BQ}{DQ} = \frac{S_{BMN}}{S_{DMN}} \quad \text{（共边定理）}$$

$$= \frac{S_{BMN}}{S_{AMN}} \cdot \frac{S_{AMN}}{S_{CMN}} \cdot \frac{S_{CMN}}{S_{DMN}} \quad \text{（分子、分母同乘一等量）}$$

$$= \frac{BM}{AM} \cdot \frac{AP}{CP} \cdot \frac{CN}{DN} \quad \text{（共边定理）}$$

$$= 4\frac{AP}{CD}。 \quad \text{（已知条件）}$$

例 5　凸四边形 $ABCD$ 的两边 AD、BC 延长后交于 K，两边 AB、CD 延长后交于 L，对角线 BD、AC 延长后分别与直线 KL 交于 F、G。如图7-8。

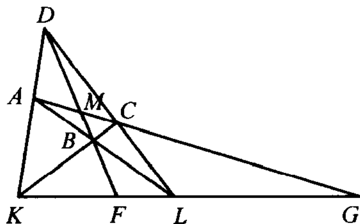


图 7-8

求证：$\frac{KF}{FL} = \frac{KG}{LG}$。

证法 1

$$\frac{KF}{LF} = \frac{S_{KBD}}{S_{LBD}} \quad \text{（共边定理）}$$

$$= \frac{S_{KBD}}{S_{KBL}} \cdot \frac{S_{KBL}}{S_{LBD}}$$

$$= \frac{CD}{CL} \cdot \frac{AK}{AD}。 \quad \text{（共边定理）}$$

$$= \frac{S_{ADC}}{S_{ALC}} \cdot \frac{S_{AKC}}{S_{ADC}} \quad \text{（共边定理）}$$

$$= \frac{S_{AKC}}{S_{ALC}} = \frac{KG}{LG}。 \quad \text{（共边定理）}$$

此题是著名数学家华罗庚在《1978 年全国中学生数学竞赛题解》一书中所提到的一个有趣的几何问题，他还给出了如

下传统证明。

证法 2　设在$\triangle KFD$中KF边上的高为h，利用$2S_{KFD}=KF\cdot h=KF\cdot DF\cdot\sin\angle KDF$，得到$KF-\frac{1}{h}\cdot KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF$。

同理，再求出LF、LG与KG的类似公式，因而

$$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF}{LD\cdot DF\cdot\sin\angle LDF}\cdot\frac{LD\cdot DG\cdot\sin\angle LDG}{KD\cdot DG\cdot\sin\angle KDG}$$

$$=\frac{\sin\angle KDF}{\sin\angle LDF}\cdot\frac{\sin\angle LDG}{\sin\angle KDG}。$$

同理可得到

$$\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}=\frac{\sin\angle ADM}{\sin\angle CDM}\cdot\frac{\sin\angle CDG}{\sin\angle ADG}。$$

所以　$$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}。$$

类似地，也可以证明

$$\frac{LF}{KF}\cdot\frac{KG}{LG}=\frac{\sin\angle LBF}{\sin\angle KBF}\cdot\frac{\sin\angle KBG}{\sin\angle LBG}$$

$$=\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}\cdot\frac{\sin\angle CBG}{\sin\angle ABG}$$

$$=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}。$$

由此可见$\left(\frac{KF}{LK}\cdot\frac{LG}{KG}\right)^2=1$。即得结论。

从以上两个证明上看，用面积方法共边定理比用传统方法的思路更清晰，证法更简洁。

共角定理及其应用

如果一个三角形的一个角与另一个三角形的一个角相等或互为补角，就称它们是一对共角三角形。共角三角形与共边三角形一样，比比皆是。下面介绍另一把解几何问题的“利剑”——共角定理。

共角定理 若$\angle ABC$与$\angle A'B'C'$相等或互为补角，则

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}。$$

证明 如图 7-9，把两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 拼在一起，使$\angle B$与$\angle B'$重合或互为补角，便得

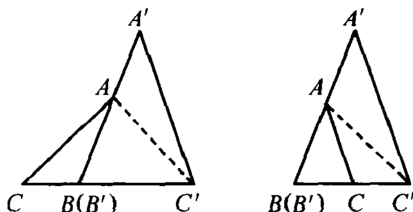


图 7-9

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}}\cdot\frac{S_{ABC'}}{S_{A'B'C'}}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AB}{A'B'}。\quad（基本命题）$$

例 6 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$。

求证：$AB=AC$。

证明 把$\triangle ABC$看做是两个共角（$\angle ABC=\angle ACB$）三角形，由共角定理即得

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACB}}=\frac{AB\cdot BC}{AC\cdot BC}=\frac{AB}{AC}。$$

由于$\triangle ABC$与$\triangle ACB$的面积相等，故$\frac{AB}{AC}=1$，即得 $AB=AC$。

例 7 设 AM 是$\triangle ABC$在 BC 边上的中线，任作一条直线分别交 AB、AC、AM 于 P、Q、N，如图 7-10。

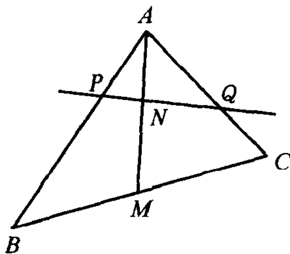


图 7-10

求证：$\frac{AB}{AP}, \frac{AM}{AN}, \frac{AC}{AQ}$为等差数列。

证明　由于 M 为 BC 的中点，

所以　$S_{ABM}=S_{ACM}=\frac{1}{2}S_{ABC}$。　　(3)

$$\frac{S_{PAN}}{S_{BAM}}=\frac{AP\cdot AN}{AB\cdot AM}。\qquad（共角定理）$$

$$\frac{S_{NAQ}}{S_{MAC}}=\frac{AQ\cdot AN}{AC\cdot AM}。\qquad（共角定理）$$

将上面两式相加，并注意到(3)式，得

$$\frac{AN}{AM}\left(\frac{AP}{AB}+\frac{AQ}{AC}\right)=\frac{S_{PAN}+S_{NAQ}}{\frac{1}{2}S_{ABC}}=\frac{2S_{APQ}}{S_{ABC}}$$

$$=2\,\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}。（共角定理）\qquad (4)$$

解出(4)式，得

$$\frac{AM}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{AC}{AQ}+\frac{AB}{AP}\right)。$$

即证明了　$\frac{AB}{AP}$、$\frac{AM}{AN}$、$\frac{AC}{AQ}$为等差数列。

例 8　自一点 P 引四条直线分别与另两条直线交于点 A、B、C、D 和点 A'、B'、C'、D'，如图 7-11。

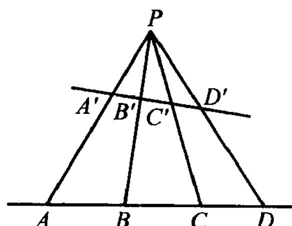


图 7-11

求证：

$$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}=\frac{A'B'\cdot C'D'}{A'C'\cdot B'D'}。$$

证明　将求证部分变形为

$$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}\cdot\frac{A'C'\cdot B'D'}{A'B'\cdot C'D'}$$

$$=\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}\cdot\frac{S_{PCD}}{S_{PBD}}\cdot\frac{S_{PA'C'}}{S_{PA'B'}}\cdot\frac{S_{PB'D'}}{S_{PCD}}\qquad（共边定理）$$

$$=\frac{S_{PAB}}{S_{PA'B'}}\cdot\frac{S_{PCD}}{S_{PC'D'}}\cdot\frac{S_{PA'C'}}{S_{PAC}}\cdot\frac{S_{PB'D'}}{S_{PBD}}$$ （将分母变形）

$$=\frac{PA\cdot PB}{PA'\cdot PB'}\cdot\frac{PC\cdot PD}{PC'\cdot PD'}\cdot\frac{PA'\cdot PC'}{PA\cdot PC}\cdot\frac{PB'\cdot PD'}{PB\cdot PD}$$ （共角定理）

$=1$。

即证明了所要证的结论。

例 9　在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，CM是AB边上的中线，自A作CM的垂线交CM于P，交BC于D，如图 7-12。

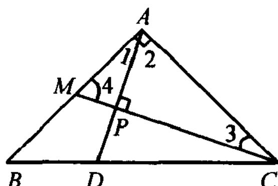


图 7-12

求证：$BD=\frac{1}{3}BC$。

证明　由题设可得

$\angle 1=\angle 3$，　　（同角的余角相等）

$\angle 2=\angle 4$。　　（同角的余角相等）

由此知$\triangle AMC$与$\triangle ABD$是共角三角形，与ADC也是共角三角形。所以

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$$ （共边定理）

$$=\frac{S_{ABD}}{S_{AMC}}\cdot\frac{S_{AMC}}{S_{ADC}}$$

$$=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot MC}\cdot\frac{AM\cdot MC}{AD\cdot AC}$$ （共角定理）

$$=\frac{AB\cdot AM}{AC\cdot AC}=\frac{1}{2}。$$

由于$BD:DC=1:2$，

故　$BD=\frac{1}{3}BC$。

例 10　（蝴蝶定理）设圆内的弦AB之中点为M，过M

任作两弦 CD、EF，连 CE、DF 分别交 AB 于 G、H，如图 7-13。

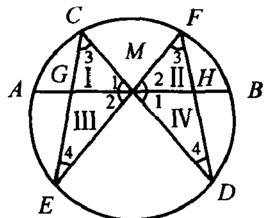


图 7-13

求证：$MG=MH$。

证明　把图 7-13 中所标出的四个三角形循环相比并连乘，得

$$1=\frac{S_{GCM}}{S_{MFH}}\cdot\frac{S_{MFH}}{S_{GME}}\cdot\frac{S_{GME}}{S_{MDH}}\cdot\frac{S_{MDH}}{S_{GCM}}$$

$$=\frac{GC\cdot MC}{HF\cdot MF}\cdot\frac{MF\cdot MH}{ME\cdot MG}\cdot\frac{ME\cdot GE}{MD\cdot HD}\cdot\frac{MD\cdot MH}{MG\cdot MC}$$

（共角定理）

$$=\frac{MH^2\cdot GC\cdot GE}{MG^2\cdot HF\cdot HD}=\frac{MH^2\cdot GA\cdot GB}{MG^2\cdot HA\cdot HB}。$$

（圆内相交两弦被交点分成比例线段）　　(5)

设 $MA=MB=a$，$MH=x$，$MG=y$，则 $GA=a-y$，$GB=a+y$，$HB=a-x$，$HA=a+x$，从而(5)式可写成

$$x^2(a^2-y^2)=y^2(a^2-x^2)。\tag{6}$$

化简(6)式，得 $a^2x^2=a^2y^2$，即 $x=y$。定理得证。

蝴蝶定理是初等几何中著名的难题之一，直到今天还有人提出不同的证法。上面用共角定理所给出的证明不仅简单而且不用作辅助线。

共角定理只涉及两个三角形的面积比，我们希望把它推广到两个四边形。四边形可分为凸四边形、凹四边形、星形四边形和退化四边形等四种情况，如图 7-14。

四边形的分类可以用对角线的相对位置来描述。如果用 S_{ABCD}表示四边形 $ABCD$ 的面积，S_{ABCD}的构成也与 AC、BD 的相对位置有关。

(1) 凸四边形的两条对角线相交于一点，每条对角线的两端点分居于另一对角线所在直线的两侧，如图 7-14(a)。这时

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}=S_{BAD}+S_{BCD}。$$

（2）四四边形两条对角线的一条在四边形内，另一条在四边形外，如图 7-14(b)，这时有

$$S_{ABCD}=|S_{ABC}-S_{ADC}|=S_{BAD}+S_{BCD}。$$

（3）星形四边形两条对角线都在四边形之外，如图 7-14(c)，约定

$$S_{ABCD}=|S_{ABC}-S_{ADC}|=|S_{BAD}\quad S_{BCD}|。$$

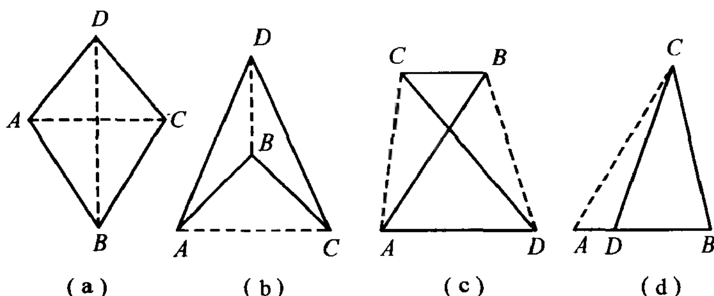


图 7-14

（4）退化四边形总有三个顶点在一条直线上，因而只有一条不与边重合的对角线，这条对角线可能是外对角线，如图 7-14(d)，也可能是内对角线如图 7-15。这时，当 AC 为外对角线时，有

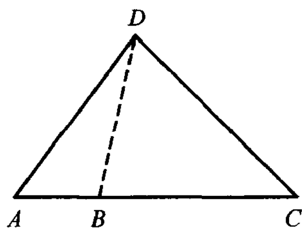


图 7-15

$$S_{ABCD}=|S_{ABC}-S_{ADC}|=S_{BAD}+S_{BCD}。$$

当 BD 为内对角线时，则有

$$S_{ABCD}=S_{BAD}+S_{BCD}=S_{ABC}+S_{ADC}。$$

总之，不论哪种情形，四边形面积 S_{ABCD} 总可以由 $\triangle ABC$、

$\triangle ADC$（或$\triangle BCD$、$\triangle BAD$）的面积和或差构成。当四边形的一条对角线 AC(或 BD）沿它所在的直线滑动时，如图 7-16，$\triangle ABC$、$\triangle ADC$ 的面积不变（或$\triangle BAD$、$\triangle BCD$ 的面积不变），从而 S_{ABCD}也不变。具体地，在图 7-16 中，A、C 分别滑到 A_1、C_1 处，$AC=A_1C_1$，则 $S_{A_1BC_1D}=S_{ABCD}$。

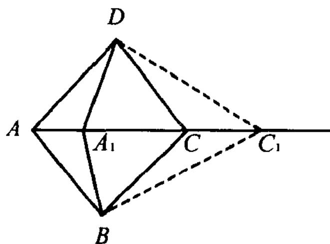


图 7-16

根据这个道理，我们可以让一个四边形的两条对角线分别沿它所在的直线移动，直到两条对角线成为一个三角形的两边，这个三角形的面积正好等于原四边形的面积。也就是说，四边形 $ABCD$ 的面积，等于以其两对角线为两边，其夹角等于两对角线夹角的三角形面积。

由此得到：

推广的共角定理　若四边形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$的对角线夹角相等或互补，则有

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}}=\frac{AC\cdot BD}{A'C'\cdot B'D'}。$$

今后，用到共角定理时，均不排除四边形面积比的情形。

下面利用推广的共角定理证明一个很重要的公式，那就是定比分点公式。

例 11　设线段 PQ 在直线 AB 的一侧，R 是 PQ 上任一点，$PR=\lambda PQ$，如图 7-17。

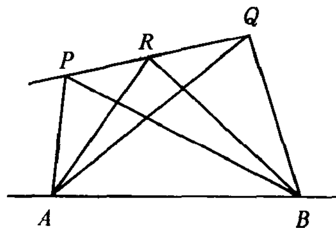


图 7-17

求证：$S_{RAB}=(1-\lambda)\cdot$

$S_{PAB}+\lambda S_{QAB}$。(这个公式叫做定比分点公式)

证明　当 $PQ /\!/ AB$ 时，$S_{RAB}=S_{PAB}=S_{QAB}$，所要证的公式显然成立。

当 PQ 与 AB 不平行时，考虑两个星形四边形面积的比，可得

$$\frac{S_{QAB}-S_{RAB}}{S_{RAB}-S_{PAB}}=\frac{S_{AQBR}}{S_{ARBP}}$$

$$=\frac{AB\cdot RQ}{AB\cdot PR}\quad (\text{推广的共角定理})$$

$$=\frac{1-\lambda}{\lambda}。\quad (\text{已知条件})$$

故 $\lambda(S_{QAB}-S_{RAB})=(1-\lambda)(S_{RAB}-S_{PAB})$。

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，就成为中点公式，即

$$S_{RAB}=\frac{1}{2}(S_{PAB}+S_{QAB})。$$

上面引进的定比分点公式(例 11)有一个限制，就是要求 P、Q 两点在直线 AB 的同侧，并要求 R 在 P、Q 两点之间。这个限制在引入有向线段和带符号面积的概念后，就可以去掉。

记号 $\overline{AB}$ 表示有向线段，它的长度(绝对值)等于 AB，但符号可正可负，其正、负可以由指定其直线 AB 的方向确定，如果直线的方向是由 A 到 B，则 $\overline{AB}>0$，而 $\overline{BA}<0$。一般总有 $\overline{AB}=-\overline{BA}$。

容易验证，共线三点 A、B、C 之间不论位置如何，总有

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}。$$

这个等式不管如何规定直线方向，也不管 B 是否在 A、C 之间，总是成立的，这就是有向线段的方便之处。

记号 $\overline{S}_{ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的带符号面积，一般规定：当 A—B—C 沿 $\triangle ABC$ 周界逆时针绕行时，有 $\overline{S}_{ABC}>0$，反过来 $\overline{S}_{ABC}<$

0。按这个规定应当有$\overline{S}_{ABC}=-\overline{S}_{BAC}=\overline{S}_{BCA}=-\overline{S}_{CAB}=-\overline{S}_{ACB}$，也就是说，相邻两个字母换位时，$\overline{S}_{ABC}$变号。有了带符号面积，平面上任意四个点 A、B、C、D 之间，总有

$$\overline{S}_{ABC}+\overline{S}_{ACD}=\overline{S}_{ABD}+\overline{S}_{BCD}。$$

这就是引进带符号面积的方便之处。假如不用带符号面积，则 S_{ABC}、S_{ACD}、S_{ABD}、S_{BCD}之间的关系与四点的位置有关，会产生多种情形。

我们规定，四边形 $ABCD$ 的带符号面积为

$$\begin{aligned}\overline{S}_{ABCD}&=\overline{S}_{ABC}+\overline{S}_{ACD}\\&=\overline{S}_{ABD}+\overline{S}_{BCD}。\end{aligned}$$

$AC/\!/BD$ 时当且仅当$\overline{S}_{ABCD}=0$。

有了带符号面积与有向线段的概念，共边定理可表示为更准确的形式，即

共边定理(一般形式)　若直线 PQ 与 AB 交于点 M，则

$$\frac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{QAB}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}\text{且}\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{PAQB}}。$$

而定比分点公式也可以推广到更一般的形式，即

定比分点公式(一般形式)　若 P、Q、R 三点共线，且 $\lambda\overline{PQ}=\overline{PR}$，则

$$\overline{S}_{RAB}=\lambda\overline{S}_{QAB}+(1-\lambda)\overline{S}_{PAB}。$$

消点算法初谈

前面我们介绍了共边定理和共角定理以及面积的定比分点公式，它们都是解几何问题的有力工具。那么，如何有效地利用这些工具去解几何问题？它们能解决什么样的问题？能

不能用这些工具建立起一套行之有效的机器证明方法？这些问题都被张景中院士解决了。他在面积方法的基础上，创立了一种消点算法，为实现几何定理自动生成的可读性机器证明奠定了基础，并用消点算法在计算机上实现了可读性证明。

例 12　已知任意三角形 ABC，直线 XY 分别与直线 AC、BC、AB 交于 E、D、F，如图7-18。

求证：$\frac{CE}{AE}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{AF}{BF}=1$。

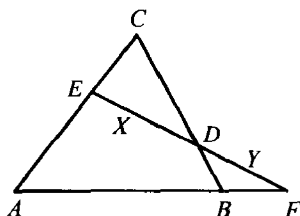


图 7-18

分析　本题所要证明的结论是一个等式，而等式左端有很多字母，它们代表着点，右端是数字 1。消点算法的基本思想就是找到一种算法能把左端的字母（代表点）一个一个地消去，但是怎样才能把这些点一一消去呢？必须先看这些点是如何产生的。下面我们把题目中所涉及的 8 个点产生的过程作一分析。先看它们是如何作出的。

作图　(1) 任取平面上不共线三点 A、B、C。

(2) 任取不重合的两点 X、Y。

(3) 直线 XY 分别与 AC、BC、AB 交于 E、D、F。

前五个点 A、B、C、X、Y 是任取的点，称为自由点，后三个点 D、E、F 是受假设条件限制的，称为约束点。

消点算法主要是设法消去约束点，利用假设条件和面积方法（也可用其他方法）将约束点一一消去，而消点的顺序是先消去最后作出的点，然后逐一消去，最后使左端的点（字母）全部消去，所得的数字如果等于右端的数字，命题得证。现将例 12 证明如下。

证明　最后作的点是 F，而包含点 F 的几何量是 $\frac{AF}{BF}$，由共边定理有

$$\frac{AF}{BF}=\frac{S_{AXY}}{S_{BXY}}。$$

这样就消去了点 F。同样，由于

$$\frac{CE}{AE}=\frac{S_{CXY}}{S_{AXY}},\frac{BD}{CD}=\frac{S_{BXY}}{S_{CXY}},$$

故可把点 E 和点 D 消去。把这些等式代入要证明的等式的左端，得

$$\frac{CE}{AE}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{S_{CXY}}{S_{AXY}}\cdot\frac{S_{BXY}}{S_{CXY}}\cdot\frac{S_{AXY}}{S_{BXY}}=1。$$

命题得证。

例 13　已知 M、N 分别是平行四边形 $ABCD$ 的两边 AB、CD 的中点。CM 交 BD 于 E，AN 交 BD 于 F。如图 7-19。

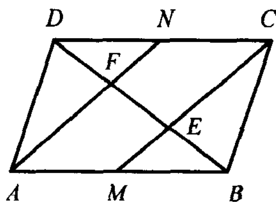


图 7-19

求证：$BE=EF=FD$。

分析　要证明 $BE=EF=FD$，若能证明 $BE=\frac{1}{3}BD$，$DF=\frac{1}{3}BD$ 就达到目的，用消点算法，即要证明 $\frac{BE}{BD}=\frac{1}{3}$，为此只要能证明 $\frac{BE}{DE}=\frac{1}{2}$，$\frac{DF}{BF}=\frac{1}{2}$ 即可。

作图　(1) 作平行四边形 $ABCD$。

(2) 取 AB、CD 的中点 M、N。

(3) 连 BD、CM、AN，CM 与 BD 交于 E，AN 与 BD 交于 F。

证明 点 E、F 最后作出，首先消去点 E。

$$\frac{BE}{DE}=\frac{S_{BMC}}{S_{DMC}} \quad \text{（共边定理）}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}S_{ABCD}}{\frac{1}{4}S_{ABCD}} \quad \text{（由于 } M \text{ 是 } AB \text{ 的中点）}$$

$$=2。$$

利用合分比定律，得 $DE=\frac{1}{3}BD$。

用同样的方法可以证明 $\frac{BF}{DF}=2$ 和 $BF=\frac{1}{3}BD$。

最后得 $BE=EF=DF$。

例 14 已知 $\triangle ABC$ 的高 BD、CE 交于 H，求证：$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\angle BAH}{\cos\angle CAH}$。

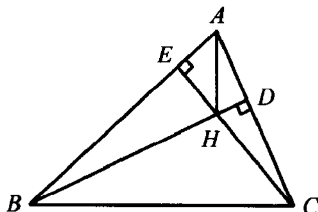


图 7-20

分析 此题结论可写成 $AC \cdot \cos\angle CAH = AB \cdot \cos\angle BAH$。即 AB、AC 在直线 AH 上的投影相等，亦即 $AH\perp BC$，这与证明三角形三条高交于一点是等价的。

根据消点算法的思想，将要证明的结论改写为

$$\frac{AC\cdot\cos\angle CAH}{AB\cdot\cos\angle BAH}=1。 \tag{7}$$

作图 (1) 任取不共线的三点 A、B、C。

(2) 作 AC 上的高 BD，AB 上的高 CE。

(3) BD 与 CE 交于 H，连 AH。

证明 关键是从(7)式中消去点 H。

$$\frac{AC \cdot \cos\angle CAH}{AB \cdot \cos\angle BAH}$$

$$=\frac{AC \cdot AD \cdot AH}{AB \cdot AE \cdot AH}$$

$$\left(由于 \cos\angle BAH=\frac{AE}{AH}, \cos\angle CAH=\frac{AD}{AH}\right)$$

$$=\frac{AC \cdot AD}{AB \cdot AE}$$

$$=\frac{AC \cdot AB \cdot \cos\angle BAC}{AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC}$$ （因为 $AE=AC\cdot\cos\angle BAC$，$AD=AB\cdot\cos\angle BAC$）

$=1$。

命题得证。

此题说明，消点不一定要用面积方法，用其他方法也可以消点，但面积方法是最常用的、最有效的消点工具。

例 15　在$\triangle ABC$的边 AB、BC、CA 上分别取 M、K、L，如图 7-21。

求证：$\triangle AML$、$\triangle BMK$、$\triangle CKL$ 中至少有一个的面积不大于$\frac{1}{4}S_{ABC}$。

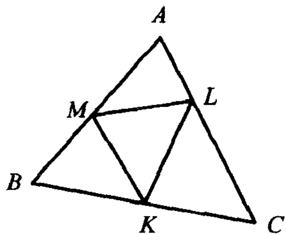


图 7-21

分析　首先设线段比例关系如下：$AM=\lambda AB$，$BK=\mu BC$，$CL=\rho CA$，则 $BM=(1-\lambda)\cdot AB$，$CK=(1-\mu)BC$，$AL=(1-\rho)AC$。

证明

$$\frac{S_{AML}}{S_{ABC}}=\frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC}$$ （共角定理）

$$=\lambda(1-\rho)。$$

类似地，

$$\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}}=\frac{BM\cdot BK}{AB\cdot BC}=\mu(1-\lambda),$$

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ABC}}=\frac{CK\cdot CL}{AC\cdot BC}=\rho(1-\mu)。$$

将上面三个式子连乘得

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{CKL}}{S_{ABC}}=\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)\rho(1-\rho)\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3。$$

由此推出 S_{AML}、S_{BMK}、S_{CKL}中至少有一个不大于$\frac{1}{4}S_{ABC}$。

这个结论可由不等式

$$x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$$

推得。

例 16　已知四边形 $A_0A_1A_2A_3$，M_1 是 A_1A_3 的中点，M_2 是 A_0A_2 的中点，直线 A_1A_2 与 A_0A_3 交于 X，直线 A_0A_1 与 A_2A_3 交于 Y，直线 M_1M_2 与 XY 交于 M_3，如图 7-22。

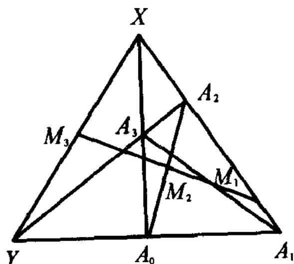


图 7-22

求证：$\overline{XM_3}=\overline{M_3Y}$。

分析　要证的结论$\overline{XM_3}=\overline{M_3Y}$可改写成$\frac{\overline{XM_3}}{\overline{M_3Y}}=1$。

本题要用有向线段和带符号面积的推广的共边定理和定比分点公式来证。

作图　(1) 任取平面上不共线的四点 A_0、A_1、A_2、A_3。

(2) 取 A_0A_3、A_1A_2 的交点 X，A_0A、A_2A_3 的交点 Y。

(3) 取 A_1A_3 的中点 M_1，A_0A_2 的中点 M_2。

(4) 取 M_1M_2 与 XY 的交点 M_3。

其中 A_0、A_1、A_2、A_3 为自由点，其余点均为约束点。

证明 $\frac{\overline{XM_3}}{\overline{M_3Y}}=\frac{\overline{S}_{XM_2M_1}}{\overline{S}_{YM_1M_2}}$ （用共边定理消去点 M_3）

$$=\frac{\frac{1}{2}(\overline{S}_{XM_2A_1}+\overline{S}_{XM_2A_3})}{\frac{1}{2}(\overline{S}_{YA_1M_2}+\overline{S}_{YA_3M_2})}$$

（由于 M_1 是 A_1A_3 的中点，用中点公式消去点 M_1）

$$=\frac{\frac{1}{2}(\overline{S}_{XA_0A_1}+\overline{S}_{XA_2A_3})}{\frac{1}{2}(\overline{S}_{YA_1A_2}+\overline{S}_{YA_3A_0})}$$

（由于 M_2 是 A_0A_2 的中点，用中点公式消去点 M_2）

$$=\frac{\overline{S}_{XA_0A_1}-\overline{S}_{XA_3A_2}}{\overline{S}_{YA_1A_2}-\overline{S}_{YA_0A_3}}$$

（交换一次字母次序，面积变号）

$$=\frac{\overline{S}_{A_0A_1A_2A_3}}{\overline{S}_{A_0A_1A_2A_3}}$$ （参看图 7-22）

$$=1。$$

命题得证。

上面的例子所用到的几何量是共线线段的比和三角形或四边形面积之比。我们总结出以下四种消点方法，就基本上可以解决这类几何问题。

消点法 1 （从共线线段比值中消去交点，简称 RLL）若 X 是 PQ 与 UV 的交点，则

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}=\frac{\overline{S}_{PUV}}{\overline{S}_{QUV}}。$$

这个消点法就是一般形式的共边定理。

消点法 2 （从三角形面积中消去定比分点，简称 SL）若 X 在 PQ 上，而且$\overline{PX}=\lambda\overline{PQ}$，则

$$\overline{S}_{ABX}=\lambda\overline{S}_{ABQ}+(1-\lambda)\overline{S}_{ABP}。$$

这就是一般形式的定比分点公式。

消点法 3 （从三角形面积中消去交点，简称 SLL）若 X 是 PQ 与 UV 的交点，则

$$\overline{S}_{ABX}=\frac{1}{\overline{S}_{PUQV}}(\overline{S}_{PUV}\cdot\overline{S}_{ABQ}+\overline{S}_{QVU}\cdot\overline{S}_{ABP})$$

或 $$\overline{S}_{ABX}=\frac{1}{\overline{S}_{PUQV}}(\overline{S}_{UQP}\cdot\overline{S}_{ABV}+\overline{S}_{VPQ}\cdot\overline{S}_{ABU})。$$

特别地，当 U、V、P、Q 中有一点在直线 AB 上时，上述公式就可简化。例如，若 Q、A、B 共线，则

$$\overline{S}_{ABX}=\frac{\overline{S}_{QVU}\cdot\overline{S}_{ABP}}{\overline{S}_{PUQV}}。$$

证明　因 X 在 PQ 上，故有实数 λ，使$\overline{PX}=\lambda\overline{PQ}$。由定比分点公式，得

$$\overline{S}_{ABX}=\lambda\overline{S}_{ABQ}+(1-\lambda)\overline{S}_{ABP}。\tag{8}$$

又因 X 是 PQ 与 UV 的交点，则由共边定理得

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}=\frac{\overline{S}_{PUV}}{\overline{S}_{QUV}}。$$

由$\overline{PX}=\lambda\overline{PQ}$，则

$$\overline{QX}=\overline{QP}+\overline{PX}=-\overline{PQ}+\lambda\overline{PQ}=(\lambda-1)PQ。$$

故 $$\frac{\overline{S}_{PUQ}}{\overline{S}_{QUV}}=\frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}=\frac{\lambda\overline{PQ}}{(\lambda-1)\overline{PQ}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}。$$

又因$\overline{S}_{PUV}+\overline{S}_{QVU}=\overline{S}_{PUQV}$，故

$$\lambda=\frac{\overline{S}_{PUV}}{\overline{S}_{PUQV}},(1-\lambda)=\frac{\overline{S}_{QVU}}{\overline{S}_{PUQV}}。$$

将上面两式代入(8)式，即得所要证明的公式。

消点法 4 （从共线线段比中消去定比分点，简称 RL），若点 X 在直线 PQ 上，且$\overline{PX}=\lambda\overline{PQ}$，则对于直线 PQ 上任两点 A、B，有

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AP}+\lambda\overline{PQ}}{\overline{AB}}。$$

这个公式是显然的，因$\overline{AX}=\overline{AP}+\overline{PX}=\overline{AP}+\lambda\overline{PQ}$。

消去平行线上的点

前面我们已经看到，共边定理是解几何问题的一个重要工具，但使用共边定理的前提是直线 PQ 与 UV 要相交于点 M。如果 PQ 与 UV 不相交，也就是 $PQ/\!/UV$，怎样消去平行线上的点呢？下面我们介绍平行线面积定理。

平行线面积定理　对于平面上任意四点 A、B、P、Q，$AB/\!/PQ$ 的充分必要条件是

$$\overline{S}_{PAB}=\overline{S}_{QAB}\quad（或\overline{S}_{APQ}=\overline{S}_{BPQ}）。$$

证明　充分性(用反证法)。

若 PQ 与 AB 不平行，则 PQ 与 AB 一定会相交于某点 M，由题设 M 在 PQ(或 QP)的延长线上，故 $PM\neq QM$，由共边定理及题设有

$$1=\frac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{QAB}}=\frac{PM}{QM}\neq 1。$$

矛盾。(如图 7-23)

必要性(也用反证法)。

若$\overline{S}_{PAB}\neq\overline{S}_{QAB}$，不妨设$\overline{S}_{PAB}<\overline{S}_{QAB}$，于是在线段 AQ 上有

一点 Q'，$PQ'/\!/AB$，这与平行公理矛盾。(如图 7-24)

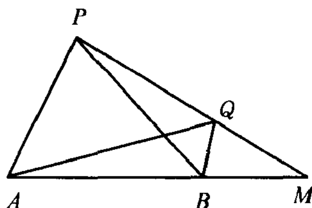


图 7-23

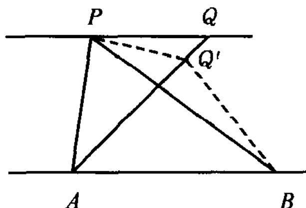


图 7-24

在上述定理中，若 P、Q 都在直线 AB 上，特别地，P 与 Q 重合，也看做 $AB/\!/PQ$，把它们作为定理的特殊情况。

如果用四边形来表示条件 $\overline{S}_{PAB}=\overline{S}_{QAB}$，则可写成

$$\overline{S}_{APBQ}=0,$$

这是因为 $\overline{S}_{APBQ}=\overline{S}_{APB}+\overline{S}_{ABQ}=-\overline{S}_{PAB}+\overline{S}_{QAB}=0$。

例 17　在平行四边形 $ABCD$ 的两边上分别取点 P、Q，如图 7-25。求证：$\overline{S}_{PAB}=\overline{S}_{QBC}$。

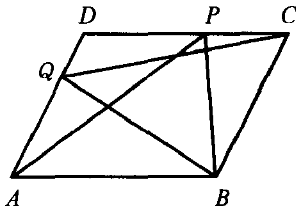


图 7-25

分析　将所要证明的结果改写为

$$\frac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{QBC}}=1。$$

作图　(1) 任取平面上不共线的三点 A、B、C。

(2) 过 C 作 AB 的平行线，过 A 作 BC 的平行线，两直线交于点 D，在 AD 上取点 Q，在 CD 上取点 P。

(3) 连 PA、PB，连 QC、QB。

证明　$\dfrac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{QBC}}=\dfrac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{CAB}}\cdot\dfrac{\overline{S}_{CAB}}{\overline{S}_{QBC}}$

$=1$。 （由平行线面积定理，$AB /\!/ CD \Rightarrow \overline{S}_{PAB}=\overline{S}_{CAB}$，$AD /\!/ BC \Rightarrow \overline{S}_{QBC}=\overline{S}_{CAB}$）

例 18 在$\triangle ABC$两边AB、AC上分别取P、Q两点，使得$\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$，如图 7-26。求证：$PQ /\!/ BC$。

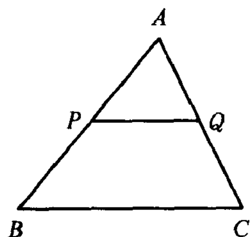


图 7-26

分析 根据平行线面积定理，要证明$PQ /\!/ BC$，只要能证明$S_{PBC}=S_{QBC}$或$\frac{S_{PBC}}{S_{QBC}}=1$即可。

作图 (1) 任取不共线三点A、B、C。

(2) 在AB上取点P，使$PB=\lambda AB$，在AC上取点Q，使$QC=\lambda AC$。

(3) 连结P、Q。

证明 $\frac{S_{PBC}}{S_{QBC}}=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{ABC}}{S_{QBC}}$

$=\frac{PB}{AB}\cdot\frac{AC}{QC}$ （共边定理）

$=1$。 （已知条件）

特别地，三角形两边中点的连线平行第三边。

例 19 已知$BC /\!/ EF$，直线BF与CE交于I，BE与CF交于A，BC与AI交于M，如图 7-27。求证：M是BC的中点。

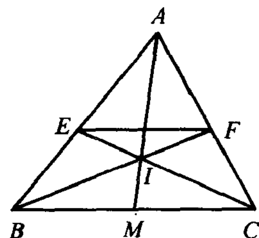


图 7-27

分析 只要能证明$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=1$即

可。此题是1978年由数学家华罗庚主持命题的全国八省、市数学竞赛第二试第一题，他指出：此题包含了仿射几何基本原理。苏步青先生也来信指出同样性质。这个题目受大数学家的青睐有一定道理，现用消点算法证明。

作图　(1)　任取不共线三点 A、B、C。

(2)　在 AB 上任取点 E。

(3)　过 E 作 BC 的平行线交 AC 于 F。

(4)　连 BF、CE，交于 I。

(5)　连 AI 交 BC 于 M。

证明　$\dfrac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\dfrac{\overline{S}_{ABI}}{\overline{S}_{AIC}}$　　（用共边定理消去点 M）

$=\dfrac{\overline{S}_{BFE}\cdot\overline{S}_{ABC}\cdot\overline{S}_{BCFE}}{\overline{S}_{CFE}\cdot\overline{S}_{ABC}\cdot\overline{S}_{BCFE}}$

（用消点法3消去点 I）

$=1$。　　（由 $BC/\!/EF\Rightarrow\overline{S}_{BFE}=\overline{S}_{CFE}$）

例20　在△ABC 中，M 是 BC 边的中点，过 M 作直线交 AC 边于 E，交 AB 的延长线于 F，如图7-28。

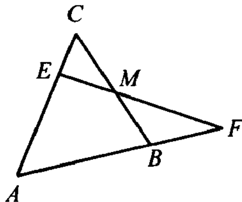


图7-28

求证：$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$。

分析　只要能证明

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\cdot\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=1$ 即可。

作图　(1) 任取不共线的三点 A、B、C。

(2) 取 BC 的中点 M。

(3) 过 M 任作直线交 AC 于 E，交 AB 的延长线于 F。

证明 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{S}_{AEF}}{\overline{S}_{CEF}}\cdot\frac{\overline{S}_{BEF}}{\overline{S}_{AEF}}$ （共边定理）

$=\frac{\overline{S}_{BEF}}{\overline{S}_{CEF}}$（由 M 是 BC 的中点，故 $\overline{S}_{BEF}=\overline{S}_{CEF}$）

$=1$。

例 21 已知一直线平行于梯形 $ABCD$ 的底，而与腰 AD、BC 分别交于 H、E，又与对角线 AC、BD 分别交于 G、F，如图 7-29。求证：$\overline{HG}=\overline{FE}$。

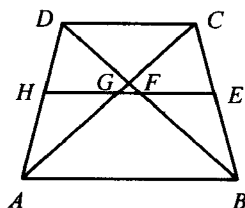


图 7-29

分析 将所要证明的结论改写成 $\frac{\overline{HG}}{\overline{FE}}=1$。

作图 (1) 任取不共线三点 A、B、C。

(2) 过 C 作 AB 的平行线 CD。

(3) 在 AD 上取点 H（不妨设 $\overline{AH}=\lambda\overline{AD}$）。

(4) 过 H 作 AB 的平行线交 AC 于 G，交 BD 于 F，交 BC 于 E。

证明 $\frac{\overline{HG}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{GF}}\cdot\frac{\overline{GF}}{\overline{FE}}$ （分子、分母同乘 $\overline{GF}$）

$=\frac{\overline{S}_{ACH}}{\overline{S}_{AFC}}\cdot\frac{\overline{S}_{BDG}}{\overline{S}_{BED}}$（用共边定理部分消去点 G、F、E）

$=\frac{\overline{S}_{ACH}}{\overline{S}_{BED}}$ （由 $BC/\!/GF/\!/AB\Rightarrow\overline{S}_{BDG}=\overline{S}_{AFC}$）

$=\frac{\overline{S}_{ACH}\cdot\overline{S}_{ABC}}{\overline{S}_{ABH}\cdot\overline{S}_{BCD}}$（用共边定理和平行线面积定理消去点 E）

$$= \frac{\lambda \overline{S}_{ACD}}{\lambda \overline{S}_{ABD}} \cdot \frac{\overline{S}_{ABC}}{\overline{S}_{BCD}} \text{（由} \overline{AH} = \lambda \overline{AD}\text{，消去点} H\text{）}$$

$$= 1。\qquad \text{（由} CD // AB\text{，消去点} D\text{）}$$

为了得到消去平行线交点的消点算法。我们由平行线面积定理推出下面两个结果。

推论 1 设 $ABCD$ 是平行四边形，P 是平面上任意点，则有

$$\overline{S}_{PAB} + \overline{S}_{PCD} = \overline{S}_{ABC} \tag{9}$$

及

$$\overline{S}_{PAB} = \overline{S}_{PDAC} = \overline{S}_{PDBC}。\tag{10}$$

证明 过 P 作 AB 的平行线与直线 BC 交于 Q，则由平行线的面积性质，有

$$\overline{S}_{PAB} = \overline{S}_{QAB}，\ \overline{S}_{PCD} = \overline{S}_{QCD} = \overline{S}_{QCA}。$$

当点 P（和 Q）在直线 AB、CD 之间时，有

$$S_{PAB} + S_{PCD} = S_{QAB} + S_{QCA} = S_{ABC}。$$

当点 P 在直线 DC 外侧时（即点 P 与 AB 分居于 DC 两侧），有

$$S_{PAB} - S_{PCD} = S_{QAB} - S_{QCA} = S_{ABC}。$$

而当点 P 在直线 AB 外侧时，则有

$$-S_{PAB} + S_{PCD} = S_{QCA} - S_{QAB} = S_{ABC}。$$

这表明要证的(9)式成立。

至于(10)式，则可由(9)式及 $\overline{S}_{PDAC}$（$\overline{S}_{PDBC}$）的定义导出，即有

$$\overline{S}_{PAB} = \overline{S}_{ABC} - \overline{S}_{PCD} = \overline{S}_{ACD} + \overline{S}_{DCP} = \overline{S}_{PDAC}，$$

$$\overline{S}_{PAB} = \overline{S}_{ABC} - \overline{S}_{PCD} = \overline{S}_{BCD} + \overline{S}_{DCP} = \overline{S}_{PDBC}。$$

推论 1 的几何意义是：无论点 P 在平面上如何移动，S_{PAB} 与 $\overline{S}_{PCD}$ 之和保持不变。

推论 2 设 $ABCD$ 是平行四边形，P 与 Q 是平面上任意两点，则有

$$\overline{S}_{APQ}+\overline{S}_{CPQ}=\overline{S}_{BPQ}+\overline{S}_{DPQ} \tag{11}$$

或

$$\overline{S}_{PAQB}=\overline{S}_{PDQC}。 \tag{12}$$

证明 记平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 的交点为 O，由定比分点公式，得

$$\overline{S}_{APQ}+\overline{S}_{CPQ}=2\overline{S}_{OPQ}，\ \overline{S}_{BPQ}+\overline{S}_{DPQ}=2\overline{S}_{OPQ}。$$

所以 $\overline{S}_{APQ}+\overline{S}_{CPQ}=\overline{S}_{BPQ}+\overline{S}_{DPQ}$。

移项得

$\overline{S}_{APQ}-\overline{S}_{BPQ}=\overline{S}_{DPQ}-\overline{S}_{CPQ}$。

即 $\overline{S}_{DAQB}=\overline{S}_{PDQC}$。

推论 2 的几何意义是：四边形的对角线在平面上作任意平行移动时，四边形带符号面积保持不变。

有了这两个推论，我们容易建立有关平行线交点的消点算法。

消点法 5 （从共线线段比值中消去平行线与连接两点的直线的交点，简称 RPL）已知相交直线 PQ、UV 和 UV 外一点 W，过 W 作 UV 的平行线交 PQ 于 X，则

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}=\frac{\overline{S}_{PUWV}}{\overline{S}_{QUWV}}。$$

证明 在直线 WX 上取点 T，使 $WTVU$ 为平行四边形，则

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QX}}=\frac{\overline{S}_{PWT}}{\overline{S}_{QWT}} \quad (共边定理)$$

$$=\frac{\overline{S}_{PUWV}}{\overline{S}_{QUWV}}。(推论 1)$$

消点法 6 （从三角形面积中消去平行线与连接两点的直线的交点，简称 SPL）已知相交直线 PQ、UV 和 UV 外一点 W，过 W 作 UV 的平行线交 PQ 于 X，则对于任意两点 A、B，有

$$\overline{S}_{ABX}=\frac{1}{\overline{S}_{QUPV}}(\overline{S}_{QUWV}\cdot\overline{S}_{PAB}+\overline{S}_{PVWU}\cdot\overline{S}_{QAB})。$$

证明 取 WX 上一点 T，使 $WTVU$ 为平行四边形，则由定比分点公式，得

$$\overline{S}_{ABX}=\frac{\overline{XQ}}{\overline{PQ}}\overline{S}_{ABP}+\frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}\overline{S}_{ABQ}。\tag{13}$$

再由共边定理及推论 1 和推论 2，得

$$\frac{\overline{XQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{S}_{QWT}}{\overline{S}_{QWPT}}=\frac{\overline{S}_{QUWT}}{\overline{S}_{QUPV}}。$$

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{S}_{PTW}}{\overline{S}_{QWPT}}=\frac{\overline{S}_{PVWU}}{\overline{S}_{QUPV}}。$$

将上面两式代入(16)式即得所要证明的结果。

消点法 7 （从平行线段比中消去分别与两条直线平行的直线的交点，简称 RPP）已知两条相交直线 PQ、UV 及点 R、W，过 W 作 UV 的平行线与过 R 且平行于 PQ 的直线交于 X，则有

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{S}_{RUWV}}{\overline{S}_{PUQV}}。$$

证明 在直线 WX 上取点 T，使 $WTVU$ 为平行四边形，在直线 RX 上取点 S，使 $RSQP$ 为平行四边形，则由平行四边形性质及共边定理，得

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{RX}}{\overline{RS}}=\frac{\overline{S}_{RWT}}{\overline{S}_{RWST}}。$$

由推论 1，得

$$\overline{S}_{RWT}=\overline{S}_{RUWV}。$$

由推论 2,得

$$\overline{S}_{RWST}=\overline{S}_{RUSV}=\overline{S}_{PUQV}。$$

由上面三式即得所要证的等式。

消点法 8 (从三角形面积中消去分别与两条已知直线平行的直线的交点,简称 SPP)已知相交直线 PQ、UV 及点 R、W、A、B。过 W 作 UV 的平行线与过 R 而平行于 PQ 的直线交于 X,则有

$$\overline{S}_{ABX}=\begin{cases}\dfrac{\overline{S}_{PWQR}}{\overline{S}_{PUQV}}\cdot\overline{S}_{AUBV}+\overline{S}_{ABW}, & \text{(若 } A \text{ 或 } B \text{ 在直线 } UV \text{ 上)}\\[2ex] \dfrac{\overline{S}_{UWVR}}{\overline{S}_{PUQV}}\cdot\overline{S}_{APBQ}+\overline{S}_{ABR}。 & \text{(其他情形)}\end{cases}$$

证明　取点使 $RPQS$ 成平行四边形,应用消点法 6 可得

$$\overline{S}_{ABX}=\frac{1}{\overline{S}_{SURV}}(\overline{S}_{SUWV}\overline{S}_{RAB}+\overline{S}_{RVWU}\overline{S}_{SAB})。$$

再由推论 1 和推论 2,得

$$\overline{S}_{SURV}=\overline{S}_{QUPV}=-\overline{S}_{PUQV},$$

$$\overline{S}_{SAB}=\overline{S}_{ABS}=\overline{S}_{ABR}+\overline{S}_{ABQ}-\overline{S}_{ABP}=\overline{S}_{ABR}+\overline{S}_{APBQ},$$

$$\overline{S}_{RVWU}=-\overline{S}_{UWVR},$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_{SUWV}&=\overline{S}_{WVU}+\overline{S}_{SUV}=\overline{S}_{WVU}+\overline{S}_{RUV}+\overline{S}_{QUV}-\overline{S}_{PUV}\\&=\overline{S}_{UWVR}-\overline{S}_{PUQV}。\end{aligned}$$

把它们代入前式,可得

$$\begin{aligned}\overline{S}_{ABX}&=\frac{-1}{\overline{S}_{PUQV}}[(\overline{S}_{UWVR}-\overline{S}_{PUQV})\overline{S}_{ABR}-\overline{S}_{UWVR}(\overline{S}_{ABR}+\overline{S}_{APBQ})]\\&=\frac{\overline{S}_{UWVR}}{\overline{S}_{PUQV}}\cdot\overline{S}_{APBQ}+\overline{S}_{ABR}。\end{aligned}$$

如果 A 或 B 在直线 PQ 上,则$\overline{S}_{APBQ}$可简化为三角形面

积，当 A 或 B 在直线 UV 上时，互换记号 P、Q、R 与 U、V、W，得

$$\overline{S}_{ABX}=\frac{\overline{S}_{PRQW}}{\overline{S}_{UPVQ}}\cdot\overline{S}_{AUBV}+\overline{S}_{ABR}$$

$$=\frac{\overline{S}_{PWQR}}{\overline{S}_{PUQR}}\cdot\overline{S}_{AUBV}+\overline{S}_{ABR}。$$

这个式子中的 $\overline{S}_{AUBV}$ 可简化为三角形面积。

上述四个消点公式不必硬记，因为实际上遇到的大多是特殊情况，往往只用平行线的面积性质即可解决，万一遇到一般情形，可查对这些公式，也可用前面的作图组合起来代替平行线作图。例如“过 W 作 UV 的平行线”这个作图，可用下列步骤代替：

(1) 取 WV 的中点 M。

(2) 连 UM 延长至 N，使 $\overline{UM}=\overline{MN}$。

(3) 连 WN。

则 MN 是平行于 UV 的直线。

下面我们就如何使用上述消点算法举个例子来说明。

例 22　设在六边形 $ABCDEF$ 中，有两边 BC、EF 平行于对角线 AD，两边 CD、FA 平行对角线 BE，并且两边 DE，AB 平行，如图 7-30。求证：$CF\parallel AB$。

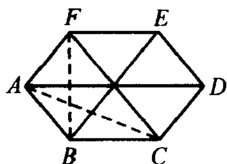


图 7-30

分析　由平行线面积性质知所要证的结论等价于 $\frac{\overline{S}_{ABC}}{\overline{S}_{ABF}}=1$。

作图　(1) 任取不共线三点 E、B、C。

(2) 过点 C 作 EB 的平行线，在此平行线上取点

D。

(3) 过点 B 作 DE 的平行线，过点 D 作 BC 的平行线，两线交于点 A。

(4) 过点 A 作 CD 的平行线，过点 E 作 BC 的平行线，两线交于点 F。

证明 $\frac{\overline{S}_{ABC}}{\overline{S}_{ABF}}=\frac{\overline{S}_{ABC}\cdot\overline{S}_{BCD}}{\overline{S}_{BECA}\cdot\overline{S}_{BCAD}}$ (用消点法 8 消去点 F)

$$=\frac{\overline{S}_{BCD}\cdot\overline{S}_{BECD}}{(\overline{S}_{BCD}-\overline{S}_{BCE})(\overline{S}_{BECD}-\overline{S}_{BED})}。$$

(用消点法 8 消去点 A)

至此，设$\overline{CD}=\lambda\,\overline{BE}$，则可用下列关系消去点 D：

$\overline{S}_{BCD}=\lambda\,\overline{S}_{BCE}$，

$\overline{S}_{BED}=\overline{S}_{BEC}=-\overline{S}_{BCE}$，

$\overline{S}_{BECD}=\overline{S}_{BEC}-\overline{S}_{BDC}=-\overline{S}_{BCE}+\lambda\,\overline{S}_{BCE}$。

则原式化为

$$\frac{\overline{S}_{ABC}}{\overline{S}_{ABF}}=\frac{\lambda\,\overline{S}_{BCE}\cdot\overline{S}_{BCE}(-1+\lambda)}{\overline{S}_{BCE}(\lambda-1)(-\overline{S}_{BCE}+\lambda\,\overline{S}_{BCE}+\overline{S}_{BCE})}=1。$$

命题得证。

这里，对用消点法 8 消去点 F、A 的过程作一说明。按消点法 8，应有公式

$$\overline{S}_{ABX}=\frac{\overline{S}_{UWVR}}{\overline{S}_{PUQV}}\cdot\overline{S}_{APBQ}+\overline{S}_{ABR}。$$

对照公式与题目中对应位置的点，有

A	B	X	P	Q	R	U	V	W	(公式中)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
A	B	F	C	D	A	B	C	E	(题目中)

代入公式，得

$$\overline{S}_{ABF}=\frac{\overline{S}_{BECA}}{\overline{S}_{CBDC}}\cdot\overline{S}_{ACBD}+\overline{S}_{ABA}。$$

（显然　$\overline{S}_{ABA}=0, \overline{S}_{CBDC}=\overline{S}_{BDC}=-\overline{S}_{BCD}, \overline{S}_{ACBD}=-\overline{S}_{BCAD}$）

这就消去了点 F。而在消去点 A 时，用了如下等式

$\overline{S}_{ABC}=\overline{S}_{BCD}$，（由 $AD/\!/BC$）

$\overline{S}_{BECD}=\overline{S}_{ABC}-\overline{S}_{BCE}=\overline{S}_{BCD}-\overline{S}_{BCE}$，（由 $AD/\!/BC$）

$\overline{S}_{BCAD}=\overline{S}_{BCD}-\overline{S}_{CDA}$。

再用消点法 8 从$\overline{S}_{CDA}$中消去点 A，由对应关系

$$\begin{array}{cccccccccl} A & B & X & P & Q & R & U & V & W & \text{（公式中）} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ C & D & A & B & C & D & D & E & B & \text{（题目中）} \end{array}$$

可得

$$\overline{S}_{CDA}=\frac{\overline{S}_{DBED}}{\overline{S}_{BDCE}}\cdot\overline{S}_{CBDC}+\overline{S}_{CDD}$$

$$=\frac{\overline{S}_{BED}}{-\overline{S}_{BECD}}\cdot\overline{S}_{BDC}=\frac{\overline{S}_{BED}}{\overline{S}_{BECD}}\cdot\overline{S}_{BCD}。$$

因而

$$\overline{S}_{BCAD}=\frac{(\overline{S}_{BECD}-\overline{S}_{BED})\overline{S}_{BCD}}{\overline{S}_{BECD}}。$$

代入前式，命题得证。

消去垂线上的点

前面所引入的消点算法，还不能解决有关垂直的几何问题。本节将介绍的勾股差概念，在解决与垂直有关的几何问题时，将扮演重要的角色。勾股差定理也是求解几何问题的一个重要工具。

定义　对任意三点 A、B、C，把几何量 $AB^2+BC^2-AC^2$ 叫做三角形 ABC 的勾股差，记 $P_{ABC}=AB^2+BC^2-AC^2$。

关于勾股差 P_{ABC}，有下列性质：

(1) $P_{ABC}=P_{CBA}$。

(2) $P_{ABC}+P_{BCA}+P_{CAB}=AB^2+BC^2+CA^2$。

(3) $P_{ABC}+P_{ACB}=2BC^2$。

(4) 若 B 在线段 AC 上，则

$P_{ABC}=-2AB\cdot BC$，$P_{ACB}=2AC\cdot BC$。

(5) $P_{ABC}=0$ 的充分必要条件是：$\angle ABC$ 为直角或 A、C 两点中至少有一点与点 B 重合。

性质(4)如果用有向线段，则可统一为

性质(4)* 若 A、B、C 三点在一直线上，则

$$P_{ABC}=2\,\overline{AB}\cdot\overline{CB}。$$

其中$\overline{AB}\cdot\overline{CB}$的意义如下：其绝对值等于 $AB\cdot CB$，其符号视$\overline{AB}$、$\overline{CB}$同向或反向而定，同向取正，反向取负。其实，$P_{ABC}=2\,\overline{AB}\cdot\overline{CB}$是 A、B、C 三点共线的充分必要条件。

为了弄清勾股差的性质和它的几何意义，我们引入三角形的余面积的概念。

对任意$\triangle ABC$（可以是退化的三角形），我们作$\triangle XYZ$，使 $AB=XY$，$BC=YZ$，并且

$$\angle XYZ=\begin{cases}90^\circ-\angle ABC, & \text{当}\angle ABC\leqslant 90^\circ\text{时；}\\ \angle ABC-90^\circ, & \text{当}\angle ABC>90^\circ\text{时。}\end{cases}$$

定义：

$$C_{ABC}=\begin{cases}S_{XYZ}, & \text{当}\angle ABC\leqslant 90^\circ\text{时；}\\ -S_{XYZ}, & \text{当}\angle ABC>90^\circ\text{时。}\end{cases}$$

为$\triangle ABC$ 关于$\angle ABC$ 的余面积。

当$\angle ABC$ 为锐角时，$\triangle ABC$ 关于$\angle ABC$ 的余面积，即夹边等于 AB、BC，夹角为$\angle ABC$ 的余角的三角形的面积；当$\angle ABC$ 为直角时，$\triangle ABC$ 关于$\angle ABC$ 的余面积为 0；当

$\angle ABC$ 为钝角时，$\triangle ABC$ 关于$\angle ABC$ 的余面积，即夹边等于 AB、BC，夹角为$\angle ABC-90°$的三角形面积的相反数，记为 C_{ABC}。

一个三角形 ABC 有三个余面积：C_{ABC}、C_{BAC}、C_{ACB}，按定义可知：$C_{ABC}=C_{CBA}$，$C_{BAC}=C_{CAB}$，$C_{ACB}=C_{BCA}$，这三个余面积一般是不同的。

从几何上看，$\triangle ABC$ 关于$\angle ABC$ 的余面积可这样作出：过点 B 引 BC 的垂线 BP，使 $BP=BC$，则 C_{ABC}的绝对值等于 S_{PAB}，而符号则依$\angle ABC$ 为锐角或钝角而定，锐角为正，钝角为负。

在图 7-31 中，以 BC 为一边画一个正方形 $BCQP$，使 Q、P 与 A 在 BC 的同侧，这时显然有

$$C_{ABC}=\overline{S}_{PBA},$$

$$C_{BCA}=\overline{S}_{ACQ}。$$

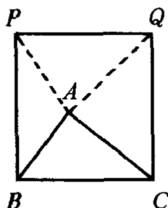


图 7-31

于是

$$\frac{1}{2}\overline{S}_{BCQP}=C_{ABC}+C_{BCA},$$

即 $C_{ABC}+C_{BCA}=\dfrac{1}{2}BC^2$。

按习惯分别以 a、b、c 表示 BC、CA、AB 的长，交换字母 A、B、C 得

$$C_{ABC}+C_{BCA}=\frac{a^2}{2},$$

$$C_{BCA}+C_{CAB}=\frac{b^2}{2},$$

$$C_{CAB}+C_{ABC}=\frac{c^2}{2}。$$

三式相加得

$$C_{ABC}+C_{BCA}+C_{CAB}=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)。$$

所以

$$C_{ABC}=\frac{1}{4}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{4}P_{ABC},$$

$$C_{BCA}=\frac{1}{4}(b^2+a^2-c^2)=\frac{1}{4}P_{BCA},$$

$$C_{CAB}=\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{4}P_{CAB}。$$

由此可见，任意三角形 ABC 关于 $\angle ABC$ 的勾股差等于它关于 $\angle ABC$ 的余面积的 4 倍。

如果 $\angle ABC=\angle XYZ$，按余面积的定义有

$$\frac{C_{ABC}}{C_{XYZ}}=\frac{AB\cdot BC}{XY\cdot YZ}。\quad (\angle ABC\neq 90°)$$

因而有

勾股差定理　当 $\angle ABC=\angle XYZ$ 时，有

$$\frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}}=\frac{AB\cdot BC}{XY\cdot YZ}。(\angle ABC\neq 90°)$$

或者更一般地有

勾股差定理(一般形式)　$\angle ABC=\angle XYZ$ 的充分必要条件是

$$\frac{P_{ABC}}{AB\cdot BC}=\frac{P_{XYZ}}{XY\cdot YZ}。$$

而 $\angle ABC$ 与 $\angle XYZ$ 互补的充分必要条件是

$$\frac{P_{ABC}}{AB\cdot BC}=-\frac{P_{XYZ}}{XY\cdot YZ}。$$

从三角学观点看恰有

$$\frac{P_{ABC}}{AB\cdot BC}=\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}=2\cos\angle ABC。$$

从投影概念的角度解释三角形的余面积为：$\triangle ABC$ 关于

$\angle B$ 的余面积 C_{ABC} 恰等于 $\overline{AB}$ 到直线 BC 上的投影与 $\overline{CB}$ 的乘积的一半。

例 23　已知 $\triangle ABC$ 的三边 a、b、c，求 AB 边上的高 CD。

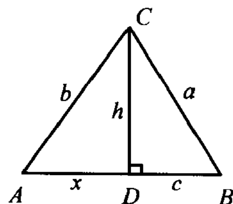


图 7-32

解　如图 7-32，不妨设 $\angle A < 90°$，记 $AD = x$，$x = \sqrt{b^2 - h^2}$，由勾股差定理，有

$$\frac{x}{c} = \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{b^2 + x^2 - h^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$= \frac{2x^2}{b^2 + c^2 - a^2}。$$

故　$\sqrt{b^2 - h^2} = x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$。

所以　$h = \dfrac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$。

还可得

$$S_{ABC} = \frac{hc}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}。$$

记半周长为 $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$，便得

$$S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

这个公式叫三斜求积公式，也叫海伦公式。

前面引进了四边形的带符号面积，它是三角形带符号面积的推广。类似地，勾股差也可以推广到四边形，而且四边形勾股差有时运用起来更为方便。

定义　四边形 $ABCD$ 的勾股差定义为

$$P_{ABCD}=AB^2+CD^2-AD^2-BC^2。$$

由此定义，立刻得到四边形勾股差 P_{ABCD}的基本性质：

(1) $P_{ABCD}=P_{BADC}=P_{CDAB}=P_{DCBA}=-P_{ADCB}$
$=-P_{BCDA}=-P_{CBAD}=-P_{DABC}$。

(2) $P_{ABCD}=P_{ABD}-P_{CBD}=P_{BAC}-P_{DAC}=P_{CDB}-P_{ADB}$
$=P_{DCA}-P_{BCA}$。

(3) $P_{ABBC}=P_{ABC}$，$P_{AABC}=-P_{ABC}=P_{ABCC}$。

性质(1)表明，对于同一个四边形，不管顶点如何排列，只要不打乱顶点之间的邻接关系，其勾股差仅仅有正、负号的变化。这使得四边形勾股差与四边形的带号面积有类似之处，它依赖于四边形本身而不依赖于某个顶点。而三角形的勾股差则有三个：P_{ABC}、P_{CAB}、P_{BCA}，它们一般各不相同，因此，四边形勾股差用起来有时比三角形勾股差更为方便。

性质(3)表明，三角形勾股差是四边形勾股差的特殊情形。而性质(2)表明，四边形勾股差可展开为三角形勾股差，正如四边形的带符号面积可以分解为两个三角形的带符号面积一样。

四边形勾股差进一步的性质有：

命题 1 （四边形勾股差的可分性）对于任意五个点 P、Q、A、B、C，有

$$P_{PAQB}+P_{PBQC}=P_{PAQC}。$$

证明 由定义，得

$$P_{PAQB}=PA^2+QB^2-AQ^2-PB^2,$$
$$P_{PBQC}=PB^2+QC^2-BQ^2-PC^2。$$

两式相加得

$$P_{PAQB}+P_{PBQC}=PA^2+QC^2-AQ^2-PC^2=P_{PAQC}。$$

命题 2 （关于四边形的勾股定理）如果 $PQ\perp AB$，则

$P_{PAQB}=0$。

证明　设直线 PQ 与 AB 交于 O，则如图 7-33，由勾股定理，得

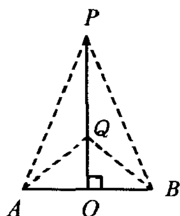


图 7-33

$$AQ^2=AO^2+QO^2, PB^2=PO^2+BO^2,$$
$$PA^2=PO^2+AO^2, QB^2=BO^2+QO^2。$$

按定义代入，即得

$$P_{PAQB}=PA^2+QB^2-AQ^2-PB^2=0。$$

从下面的命题 5 很容易看出充分性也成立。当 $P_{PAQB}=0$ 时，或者 $\overline{AB}=0$，即 A、B 重合，或者 $\overline{PQ}$ 在直线 AB 上的投影为 0，即 $PQ\perp AB$ 或 P、Q 重合。因此，$P_{PAQB}=0$ 的充分必要条件是 $PQ\perp AB$。

命题 3　设点 P、Q 到直线 AB 上的垂足分别为 U、V，则

$$P_{PAQB}=P_{UAVB}。$$

证明　应用命题 1 及基本性质，可得

$$P_{PAQB}=P_{BQAP}=P_{BQAV}+P_{BVAU}+P_{BUAP}。$$

因 $AB\perp QV$，得 $P_{BQAV}=0$。因 $AB\perp PU$，得 $P_{BUAP}=0$。

故 $P_{PAQB}=P_{BVAU}=P_{UAVB}$。

命题 4　若 P、Q、A、B 四点在同一直线上，则

$$P_{PAQB}=2\,\overline{PQ}\cdot\overline{BA}。$$

证明　直接按定义计算，得

$$\begin{aligned}P_{PAQB}&=\overline{PA}^2+\overline{QB}^2-\overline{AQ}^2-\overline{PB}^2\\&=(\overline{PA}^2-\overline{AQ}^2)-(\overline{PB}^2-\overline{BQ}^2)\\&=(\overline{PA}+\overline{AQ})(\overline{PA}-\overline{AQ})-(\overline{PB}+\overline{BQ})(\overline{PB}-\overline{BQ})\\&=\overline{PQ}(\overline{PA}-\overline{AQ})-\overline{PQ}(\overline{PB}-\overline{BQ})\\&=\overline{PQ}(\overline{PA}-\overline{AQ}-\overline{PB}+\overline{BQ})\\&=\overline{PQ}(\overline{BP}+\overline{PA}+\overline{BQ}+\overline{QA})\end{aligned}$$

$=2\overline{PQ}\cdot\overline{BA}$。

结合命题4和命题3,可以得出四边形勾股差的几何意义。

命题5 四边形 $ABCD$ 的勾股差 P_{ABCD} 等于有向线段 $\overline{AC}$ 在直线 BD 上的投影与 $\overline{DB}$ 的乘积的两倍。

由于 $P_{ABCD}=P_{DCBA}$,故 P_{ABCD} 也等于 $\overline{DB}$ 在 AC 上的投影与 $\overline{AC}$ 的乘积的两倍。

如果引进余弦函数 $\cos\theta$,易知命题5可表示为

$$P_{ABCD}=2AC\cdot BD\cos\theta。$$

其中 θ 是有向线段 $\overline{AC}$ 与 $\overline{DB}$ 的夹角,具体地,过 A 作与 $\overline{DB}$ 平行的直线 AP,使 $APBD$ 为平行四边形,则 $\theta=\angle CAP$。

作为命题5的推论,显然有

推论3 (四边形的对角线平移时,其勾股差不变)若 $PQVU$ 为平行四边形,则

$$P_{PAQB}=P_{UAVB}。$$

推论4 若 $PU\perp AB,QV\perp AB$,则有

$$P_{PAQB}=P_{UAVB}。$$

推论5 若 $\overline{PQ}=\lambda\overline{UV}$,则

$$P_{PAQB}=\lambda P_{UAVB}。$$

若 $\overline{AB}=\lambda\overline{CD}$,当然有

$$P_{PAQB}=\lambda P_{PCQD}。$$

从上述可看出,四边形勾股差与四边形带符号面积有相似之处,例如 P_{ABCD} 的基本性质(1)、(2)、(3),命题1,推论3,推论5,容易验证其对 $\overline{S}_{ABCD}$ 也成立或有相应等式。另一方面,勾股差与带符号面积之间又有明显的区别。例如,$P_{ABCD}=P_{DCBA}$,但 $\overline{S}_{ABCD}=-\overline{S}_{DCBA}$;$P_{ABCD}=0$ 的充分条件是 $AC\perp BD$,而 $\overline{S}_{ABCD}=0$ 的充分条件是 $AC/\!/BD$,等等。

上面性质中，定义与命题 4 是基本的，命题 2 是常用的。要牢记命题 4，另外命题 1 和推论 5 也要记住。

例 24　若点 X 在直线 AB 上，$\overline{AX}=\lambda\overline{AB}$，则对任一点 P，有

$$PX^2=\lambda PB^2+(1-\lambda)PA^2-\lambda(1-\lambda)AB^2。$$

证明　考虑两个勾股差 P_{PAAX} 与 P_{PAAB} 之比。应用推论 5，可得

$$\lambda=\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}}=\frac{P_{PAAX}}{P_{PAAB}}=\frac{PA^2+AX^2-PX^2}{PA^2+AB^2-PB^2}$$
$$=\frac{PA^2+\lambda^2AB^2-PX^2}{PA^2+AB^2-PB^2}。$$

故　$\lambda PA^2+\lambda AB^2-\lambda PB^2=PA^2+\lambda^2AB^2-PX^2$。

所以　$PX^2=\lambda PB^2+(1-\lambda)PA^2-\lambda(1-\lambda)AB^2$。

例 25　在正方形 $ABCD$ 中，在 AB、BC 两边上分别取点 F、E，已知 $AF=BE$。

求证：$AE\perp DF$。

分析　利用勾股差的性质，由命题 2 可知只要能证明 $P_{ADEF}=0$ 即可。

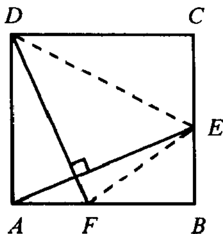


图 7-34

作图　如图 7-34。

证明

$$\begin{aligned}P_{ADEF}&=P_{ADEC}+P_{ACEF} && \text{（由勾股差的可分性）}\\&=AD^2+EC^2-AC^2-DE^2+AC^2+EF^2\\&\quad-AF^2-CE^2 && \text{（根据勾股差定义）}\\&=AD^2-DE^2+EF^2-AF^2\\&=AD^2-DC^2-CE^2+BF^2+BE^2-AF^2\end{aligned}$$

（勾股定理）

$=0$。　　　　(由已知 $AF=BE\Rightarrow BF=CE$)

由于勾股差与垂线有密切联系，故利用勾股差便于消去垂线上的点，为此需要引进下列命题。

命题 6　设 Q 到直线 AB 的垂足为 D，则

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{P_{QAB}}{P_{QBA}}\left(\text{或}\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{P_{QAB}}{P_{QAB}+P_{QBA}}=\frac{P_{QAB}}{2AB^2}\right)。$$

证明　由命题 5，注意到 D 是 Q 在 AB 上的投影，有

$$P_{QAB}=2\,\overline{DA}\cdot\overline{BA},P_{QBA}=2\,\overline{DB}\cdot\overline{AB}。$$

所以 $\dfrac{P_{QAB}}{P_{QBA}}=\dfrac{\overline{DA}\cdot\overline{BA}}{\overline{DB}\cdot\overline{AB}}=-\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$。

命题 6 提供了消去垂足的基本方法，但垂线可能与另一直线相交，即

命题 7　设直线 l 过点 P 垂直于 AB 而与 UV 交于 X，则

$$\frac{\overline{UX}}{\overline{XV}}=\frac{P_{UAPB}}{P_{PAVB}}\left(\text{或}\frac{\overline{UX}}{\overline{VX}}=\frac{P_{UAPB}}{P_{VAPB}}\right)。$$

证明　设 U、X、V 在直线 AB 上的投影依次为 S、Y、T，则由命题 5 可知

$$P_{UAPB}=2\,\overline{SY}\cdot\overline{BA},P_{VAPB}=2\,\overline{TY}\cdot\overline{BA}。$$

所以 $\dfrac{P_{UAPB}}{P_{VAPB}}=\dfrac{\overline{SY}\cdot\overline{BA}}{\overline{TY}\cdot\overline{BA}}=\dfrac{\overline{SY}}{\overline{TY}}=\dfrac{\overline{UX}}{\overline{VX}}$。

命题 8　(关于勾股差的定比分点公式)设 X 是直线 AB 上一点，使 $\overline{AX}=\lambda\,\overline{AB}$，则对平面上任意三点 U、V、W，有

(1) $P_{XUWV}=\lambda P_{BUWV}+(1-\lambda)P_{AUWV}$。

(2) $P_{UXXV}=\lambda P_{UBBV}+(1-\lambda)P_{UAAV}-2\lambda(1-\lambda)AB^2$。

证明　应用例 24 中的公式，有

$XU^2=\lambda BU^2+(1-\lambda)AU^2-\lambda(1-\lambda)AB^2$，

$XV^2=\lambda BV^2+(1-\lambda)AV^2-\lambda(1-\lambda)AB^2$。

因而

$$
\begin{aligned}
P_{XUWV}&=XU^2+WV^2-UW^2-XV^2\\
&=\lambda BU^2+(1-\lambda)AU^2-\lambda(1-\lambda)AB^2+WV^2-UW^2\\
&\quad-[\lambda BV^2+(1-\lambda)AV^2-\lambda(1-\lambda)AB^2]\\
&=\lambda(BU^2+WV^2-UW^2-BV^2)+(1-\lambda)\\
&\quad\cdot(AU^2+WV^2-UW^2-AV^2)\\
&=\lambda P_{BUWV}+(1-\lambda)P_{AUWV}。
\end{aligned}
$$

这就证明了(1)式。关于(2)式,证法类似。

$$
\begin{aligned}
P_{UXXV}&=UX^2+XV^2-UV^2\\
&=\lambda BU^2+(1-\lambda)AU^2-\lambda(1-\lambda)AB^2+\lambda BV^2\\
&\quad+(1-\lambda)AV^2-\lambda(1-\lambda)AB^2-UV^2\\
&=\lambda(BU^2+BV^2-UV^2)+(1-\lambda)(AU^2+AV^2\\
&\quad-UV^2)-2\lambda(1-\lambda)AB^2\\
&=\lambda P_{UBBV}+(1-\lambda)P_{UAAV}-2\lambda(1-\lambda)AB^2。
\end{aligned}
$$

例 26 设$\triangle ABC$的三条高分别为AF、BE、CD,求证:这三条高交于一点。

解 如图 7-35,设BE与CD交于点H,AF与CD交于G,要证明H与G重合,即$\dfrac{\overline{GC}}{\overline{GD}}=\dfrac{\overline{HC}}{\overline{HD}}$。

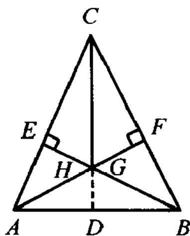


图 7-35

作图 (1) 任取不共线三点A、B、C。

(2) 过C引AB的垂线,交AB于D。

(3) 过B引AC的垂线,交CD于H。

(4) 过A引BC的垂线,交CD于G。

要证明的结论是$\dfrac{\overline{GC}}{\overline{GD}}\cdot\dfrac{\overline{HD}}{\overline{HC}}=1$。

证明 $\frac{\overline{GC}}{\overline{GD}}\cdot\frac{\overline{HD}}{\overline{HC}}=\frac{P_{ACCB}}{P_{ACDB}}\cdot\frac{\overline{HD}}{\overline{HC}}$ （用命题 7 消去点 G）

$$=\frac{P_{ACCB}}{P_{ACDB}}\cdot\frac{P_{BADC}}{P_{BACC}}$$ （用命题 7 消去点 H）

$$=\frac{-P_{BADC}}{P_{ACDB}}$$ （用 $P_{ACCB}=-P_{BACC}$化简）

$$=-\frac{P_{CBA}}{2AB^2}\cdot P_{BAAC}\cdot\frac{2AB^2}{P_{CAB}\cdot P_{ACBB}}$$

$=1$。

其中，最后一步是由于

$$P_{BADC}=\frac{P_{BADC}\cdot P_{BAAC}}{P_{BAAC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}\cdot P_{BAAC}=\frac{P_{CBA}}{2AB^2}\cdot P_{BAAC}。$$

$$P_{ACDB}=\frac{P_{ACDB}}{P_{ACBB}}\cdot P_{ACBB}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\cdot P_{ACBB}=\frac{P_{CAB}}{2AB^2}\cdot P_{ACBB}。$$

这里先用了推论 3，再用命题 6。

应当注意，消点顺序对证明过程有很大影响，这个题目如果把 C、D 两点引入的顺序倒过来，证明过程就简捷多了。

作图 （1） 任取 A、B 两点。

（2） 在直线 AB 上任取一点 D。

（3） 过 D 作 AB 的垂线 CD。

（4） 过 B 作 AC 的垂线交 CD 于 H。

（5） 过 A 作 BC 的垂线交 CD 于 G。

则消点过程为

$\frac{\overline{GC}}{\overline{GD}}\cdot\frac{\overline{HD}}{\overline{HC}}=\frac{P_{ACCB}}{P_{ACDB}}\cdot\frac{P_{BADC}}{P_{BACC}}$ （用命题 7 消去点 G、H）

$$=\frac{P_{ACCB}}{P_{ADDB}}\cdot\frac{P_{BADD}}{P_{BACC}}$$

$=1$。

最后一步用了命题 3，由 $CD\perp AB$ 可在 P_{BADC}与 P_{ACDB}中用 D 代替 C，然后由勾股差的基本性质 $P_{BACC}=-P_{ACCB}$，

$P_{BADD}=-P_{ADDB}$即得。整个推导过程变得简捷多了。

例 27　设在$\triangle ABC$中，高AD的垂足D在边BC上，在AD上任取一点J，直线BJ、CJ分别与AC、AB交于N、M，如图 7-36。求证：$\angle MDA=\angle ADN$。

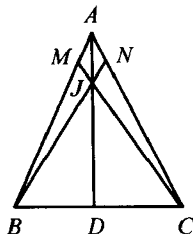


图 7-36

分析　要证明$\angle MDA=\angle ADN$，只要证明　$\dfrac{P_{ADM}}{\overline{S}_{ADM}}=\dfrac{P_{NDA}}{\overline{S}_{NDA}}$。

作图　(1) 任取B、C两点。

(2) 在线段BC上取点D。

(3) 过D作BC的垂线，在垂线上取点A。

(4) 在AD上取一点J。

(5) 直线BJ与AC交于N。

(6) 直线CJ与AB交于M。

要证明的结论是

$$\frac{P_{NDA}}{P_{ADM}}\cdot\frac{\overline{S}_{ADM}}{\overline{S}_{NDA}}=1。$$

证明　$\dfrac{P_{NDA}}{P_{ADM}}\cdot\dfrac{\overline{S}_{ADM}}{\overline{S}_{NDA}}$

$$=\frac{P_{NDA}}{\overline{S}_{NDA}}\cdot\frac{\overline{S}_{ADB}\cdot\overline{S}_{ACJ}}{\overline{S}_{ACBJ}}\cdot\frac{\overline{S}_{ACBJ}}{P_{ADA}\cdot\overline{S}_{CBJ}}$$

（利用面积关系及命题 8 消去点M）

$$=\frac{\overline{S}_{ABCJ}}{\overline{S}_{ACD}\cdot\overline{S}_{ABJ}}\cdot\frac{\overline{S}_{BCJ}\cdot P_{ADA}}{\overline{S}_{ABCJ}}\cdot\frac{\overline{S}_{ADB}\cdot\overline{S}_{ACJ}}{P_{ADA}\cdot\overline{S}_{CBJ}}$$

（同上法消去点N）

$$=\frac{\overline{S}_{ADB}}{\overline{S}_{ACD}}\cdot\frac{\overline{S}_{ACJ}}{\overline{S}_{ABJ}}$$

$$=\frac{\overline{S}_{ADB}}{\overline{S}_{ACD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}=1。$$　（用共边定理消去点J）

下面把有关勾股差的消点算法总结如下：

消点法 9 （从共线线段比中消去垂线与另一直线的交点，简称 RTL）设直线 l 过点 P 垂直于 AB 而与 UV 交于 X，则

(1) $\dfrac{\overline{UX}}{\overline{XV}}=\dfrac{P_{UAPB}}{P_{PAVB}}$。

(2) $\dfrac{\overline{UX}}{\overline{UV}}=\dfrac{P_{UAPB}}{P_{UAVB}}$。

这里(1)式即命题 7，(2)由(1)及合比律并用勾股差可分性可得。注意，当 UV 与 AB 重合时，

$$P_{UAPB}=P_{AAPB}=P_{PAB}。$$

而 $P_{PAVB}=P_{PABB}=P_{PBA}$，故消点法 9 也包含了消去垂足的命题 6。

消点法 10 （从勾股差中消去定比分点，简称 PL）设 X 是直线 AB 上一点，使 $\overline{AX}=\lambda\overline{AB}$，则对任意三点 U、V、W，有

(1) $P_{XUWV}=\lambda P_{BUWV}+(1-\lambda)P_{AUWV}$，

(2) $P_{UXXV}=\lambda P_{UBBV}+(1-\lambda)P_{UAAV}-2\lambda(1-\lambda)\overline{AB}^2$。

这就是命题 8，把以上两个方法结合起来，有

消点法 11 （从勾股差中消去垂线与另一直线的交点，简称 PTL）设直线 l 过点 P 垂直于 MN 而与 AB 交于点 X，则对任意三点 U、V、W，有

(1) $P_{XUWV}=\dfrac{1}{P_{AMBN}}(P_{AMPN}\cdot P_{BUWV}+P_{PMBN}\cdot P_{AUWV})$。

(2) $P_{UXXV}=\dfrac{1}{P_{AMBN}}(P_{AMPN}\cdot P_{UBBV}+P_{PMBN}\cdot P_{UAAV})$
$$-\frac{2P_{AMPN}\cdot P_{PMBN}\cdot\overline{AB}^2}{(P_{AMBN})^2}。$$

证明 由消点法 9 已可得 $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}}=\dfrac{P_{AMPN}}{P_{AMBN}}$，取 $\lambda=\dfrac{P_{AMPN}}{P_{AMBN}}$，

则

$$\overline{AX}=\lambda\,\overline{AB},\overline{XB}=(1-\lambda)\overline{AB}。$$

而且有$(1-\lambda)=\frac{P_{PMBN}}{P_{AMBN}}$，再由消点法 10，即得所要证的公式。

消点法 12 （从四边形或三角形带符号面积中消去垂线与另一直线的交点，简称 STL）设直线 l 过点 P 垂直于 MN 而与 AB 交于 X，则对任意三点 U、V、W，有

(1) $\overline{S}_{XUV}=\frac{1}{P_{AMBN}}(P_{AMPN}\cdot\overline{S}_{BUV}+P_{PMBN}\cdot\overline{S}_{AUV})$。

(2) $\overline{S}_{XUWV}=\frac{1}{P_{AMBN}}(P_{AMPN}\cdot\overline{S}_{BUWV}+P_{PMBN}\cdot\overline{S}_{AUWV})$。

证明　先证明(1)。设$\overline{AX}=\lambda\,\overline{AB}$，由定比分点公式，得

$$\overline{S}_{XUV}=\lambda\,\overline{S}_{BUV}+(1-\lambda)\overline{S}_{AUV}。$$

再用消点法 9，有

$$\lambda=\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}}=\frac{P_{AMPN}}{P_{AMBN}}。$$

代入前式，即得所要证的(1)式。利用(1)式可以证明(2)式，这是因为：

$$\begin{aligned}\overline{S}_{XUWV}&=\overline{S}_{XUV}+\overline{S}_{VUW}\\&=\frac{1}{P_{AMBN}}(P_{AMPN}\cdot\overline{S}_{BUV}+P_{PMBN}\cdot\overline{S}_{AUV})+\frac{1}{P_{AMPN}}\\&\quad\cdot(P_{AMPN}+P_{PMBN})\overline{S}_{VUW}\\&=\frac{1}{P_{AMPN}}[P_{AMPN}(\overline{S}_{BUV}+\overline{S}_{VUW})+P_{PMBN}(\overline{S}_{AUV}\\&\quad+\overline{S}_{VUW})]\\&=\frac{1}{P_{AMBN}}(P_{AMPN}\cdot\overline{S}_{BUWV}+P_{PMBN}\cdot\overline{S}_{AUWN})。\end{aligned}$$

消点法 13 （从勾股差中消去两直线的交点，简称 RLL）

设直线 PQ 与 AB 交于 X，则对任意三点 U、V、W，有

(1) $P_{XUWV}=\frac{1}{\overline{S}_{PAQB}}(\overline{S}_{PAQ}P_{BUWV}+\overline{S}_{QBP}P_{AUWV})$。

(2) $P_{UXXV}=\frac{1}{\overline{S}_{PAQB}}(\overline{S}_{PAQ}\cdot P_{UBBV}+\overline{S}_{QBP}P_{UAAV})$

$$-\frac{2\overline{S}_{PAQ}\cdot\overline{S}_{QBP}}{(\overline{S}_{PAQB})^2}\cdot\overline{AB}^2。$$

证明　设$\overline{PX}=\lambda\overline{PQ}$，则由共边定理，可得

$$\lambda=\frac{\overline{S}_{PAQ}}{\overline{S}_{PAQB}},\quad (1-\lambda)=\frac{\overline{S}_{QBP}}{\overline{S}_{PAQB}}。$$

再将此两式代入消点法 10 中公式(1)、(2)即得所要证的等式。

消点法 14　(从勾股差中消去垂线上的任意点，简称 PT)过点 A 作 AB 的垂线，在垂线上任取一点 X，记 $h=\overline{S}_{XAB}$，h 为参数，则对任意三点 U、V、W，有

(1) $P_{XUWV}=\frac{16h\cdot\overline{S}_{AUBV}}{P_{ABBA}}+P_{AUWV}$。

(2) $P_{UXXV}=\frac{16h(\overline{S}_{AVB}+\overline{S}_{AUB})}{P_{ABBA}}+\frac{16h^2}{P_{ABBA}}+P_{UAAV}$。

证明　由勾股差的可分性得

$$P_{XUWV}=P_{XUAV}+P_{AUWV}。$$

记 U、V 在直线 AX 上的正投影为 U'、V'，则有

$$P_{XUAV}=2\,\overline{XA}\cdot\overline{V'U'}=2\,\overline{XA}^2\cdot\frac{\overline{V'U'}}{\overline{XA}}$$

$$=2\,\overline{XA}^2\cdot\frac{\overline{S}_{AUBV}}{\overline{S}_{XAB}}$$

$$=\frac{8h^2}{\overline{AB}^2}\cdot\frac{\overline{S}_{AUBV}}{h}\quad\left(因为\quad h^2=\frac{1}{4}\overline{XA}^2\cdot\overline{AB}^2\right)$$

$$=\frac{16h\cdot\overline{S}_{AUBV}}{P_{ABBA}}。\quad(因为\quad P_{ABBA}=2\,\overline{AB}\cdot\overline{AB})$$

这就证明了(1)式。

为了证明(2)式，先用勾股差的可分性，得

$P_{UXXV}=P_{UXAV}+P_{AXXV}$。

$P_{AXXV}=P_{AXXA}+P_{AAXV}=2\ \overline{AX}^2-P_{VAX}$。

$P_{UXAV}=P_{UXAA}+P_{UAAV}=-P_{UAX}+P_{UAAV}$。

由 $\overline{AX}^2=\frac{8h^2}{P_{ABBA}}$，得

$$P_{VAX}=2\ \overline{AX}\cdot\overline{AV'}=2\ \overline{AX}^2\cdot\frac{\overline{AV'}}{\overline{AX}}$$

$$=2\ \overline{AX}^2\cdot\frac{\overline{S}_{ABV}}{\overline{S}_{XAB}}=-\frac{16h\cdot\overline{S}_{AVB}}{P_{ABBA}}。$$

同理

$$P_{UAX}=-\frac{16h\cdot\overline{S}_{AUB}}{P_{ABBA}}。$$

代入前式即得(2)式。

消点法 15 (从三角形或四边形的带符号面积中消去垂线上的任意点，简称 ST)过点 A 作 AB 的垂线，在垂线上任取一点 X，并记 $h=\overline{S}_{XAB}$，h 为参数，则对任意三点 U、V、W，有

$$\overline{S}_{XUWV}=\frac{h\cdot P_{AVBU}}{P_{ABBA}}+\overline{S}_{AUWV}。$$

证明 由带符号面积的性质，有

$$\overline{S}_{XUWV}=\overline{S}_{XUAV}+\overline{S}_{AUWV}。$$

但若记 U、V 在直线 AB 上的正投影为 U'，V'，则有

$$\overline{S}_{XUAV}=\overline{S}_{XU'AV'}=\frac{\overline{S}_{XU'AV'}}{\overline{S}_{XAB}}\cdot\overline{S}_{XAB}$$

$$=\frac{\overline{U'V'}}{\overline{AB}}\cdot h=\frac{P_{AVBU}}{P_{ABBA}}\cdot h。$$

代入前式，即得所要证的等式。

在上述消点法 14、15 中，所取参数为带符号面积，使公式复杂了，如引入带符号距离的概念，则可使之简化。

设 X 是直线 AB 上或 AB 外一点，把比值

$$\frac{2\,\overline{S}_{XAB}}{|\overline{AB}|}$$

叫做点 X 到直线 AB 的带符号距离，用记号

$$d(X,AB)=\frac{2\,\overline{S}_{XAB}}{|\overline{AB}|}$$

表示。显然，$d(X,AB)$的绝对值等于点 X 到直线 AB 的距离。其符号直观上是这样确定的：假想一人沿射线 AB 前进，当 X 在他左方时，$d(X,AB)$为正；当 X 在他右方时，$d(X,AB)$为负。

对于消点法 14、15 中的点 X，我们取比值

$$t=\frac{d(X,AB)}{|\overline{AB}|}$$

为参数，t 与 $h=\overline{S}_{XAB}$之间的关系显然为

$$t=\frac{2h}{|\overline{AB}|^2}=\frac{4h}{P_{ABBA}}。$$

于是消点法 14 中的公式可简化为

消点法 14*

(1) $P_{XUWV}=4t\,\overline{S}_{AUBV}+P_{AUWV}$。

(2) $P_{UXXV}=4t(\overline{S}_{AVB}+\overline{S}_{AUB})+t^2P_{ABBA}+P_{UAAV}$。

而消点法 15 中的公式则可简化为

消点法 15*

$$\overline{S}_{XUWV}=\frac{t}{4}P_{AVBU}+\overline{S}_{AUWV}。$$

以下举两个例子，说明这些消点方法的应用。

例 28　在△ABC 的两边上分别向外作正方形 $ACDE$ 与

$BCFG$，又设 M 是 AB 的中点，如图 7-37。求证：$MC \perp DF$。

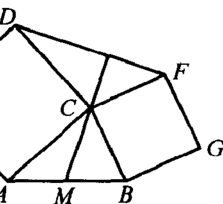


图 7-37

此题作图过程中，G、E 两点可不作。

作图 (1) 任取不共线三点 A、B、C。

(2) 取 AB 中点 M。

(3) 过 C 作 BC 的垂线，在垂线上取一点 F，使

$$t=\frac{d(F,CB)}{|\overline{CB}|}=-1。$$

(4) 过 C 作 AC 的垂线，在垂线上取一点 D，使

$$t=\frac{d(D,CA)}{|\overline{CA}|}=-1。$$

要证的结论是 $MC \perp DF$，即 $P_{DMFC}=0$。

证明 $P_{DMFC}=-4\overline{S}_{CMAC}+P_{CMFC}$ (用消点法14*消去点D)

$=-4\overline{S}_{MAC}+4\overline{S}_{CCBM}+P_{CCCM}$ (用消点法14*消去点F)

$=-2\overline{S}_{BAC}+2\overline{S}_{BAC}=0$。 (消去点 M)

例 29 在直角三角形 ABC 的斜边上作一正方形 $ABFE$，此正方形对角线交点为 P，如图 7-38。

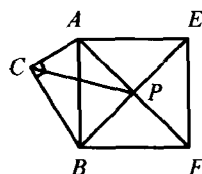


图 7-38

求证：$\angle ACP=\angle PCB$。

作图 (1) 任取两点 A、C。

(2) 过 C 作 AC 的垂线，在垂线上任取一点 B，取参数 $t=\frac{d(B,AC)}{|\overline{AC}|}=-\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}$。

(3) 过 A 作 AB 之垂线，在垂线上取点 E，使参数

$$t=\frac{d(E,AB)}{|\overline{AB}|}=\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AB}|}=1。$$

(4) 取 BE 中点 P。

要证明的等式为：$\frac{P_{ACP}}{\overline{S}_{ACP}}=\frac{P_{PCB}}{\overline{S}_{PCB}}$，即 $\frac{P_{ACP}}{P_{BCP}}\cdot\frac{\overline{S}_{PCB}}{\overline{S}_{ACP}}=1$。

证明 $P_{ACP}=\frac{1}{2}(P_{ACE}+P_{ACB})$（用消点法 10 消去点 P）

$=\frac{1}{2}P_{ECCA}$ （由 $AC\perp CB$，$P_{ACB}=0$）

$=2\overline{S}_{ACBA}+\frac{1}{2}P_{ACCA}$（用消点法 14* 消去点 E）

$=|\overline{AC}|\cdot|\overline{CB}|+|\overline{AC}|^2$

$=-t|\overline{AC}|^2+|\overline{AC}|^2$

$=(1-t)|\overline{AC}|^2$。（由定义消去点 B）

$P_{BCP}=\frac{1}{2}(P_{BCE}+P_{BCB})$（用消点法 10 消去点 P）

$=\frac{1}{2}P_{ECCB}+|\overline{BC}|^2$

$=\frac{1}{2}(4\overline{S}_{ACBB}+P_{ACCB})+|\overline{BC}|^2$

$=2\overline{S}_{ACB}+|\overline{BC}|^2$（由 $AC\perp CB$，$P_{ACCB}=0$）

$=-t|\overline{AC}|^2+t^2|\overline{AC}|^2$

$=-t(1-t)|\overline{AC}|^2$。（用定义消去点 B）

$\overline{S}_{PCB}=\frac{1}{2}\overline{S}_{ECB}$（用消点法 10 消去点 P）

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}P_{ABBC}+P_{ACCB}\right)$（用消点法 15* 消去点 E）

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot2|\overline{BC}|^2+\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot|\overline{BC}|\right)$

$=\frac{1}{4}(t^2|\overline{AC}|^2-t|\overline{AC}|^2)$

$=\frac{1}{4}t(t-1)|\overline{AC}|^2$。(用定义消去点 B)

$\overline{S}_{ACP}=\frac{1}{2}(\overline{S}_{ACE}+\overline{S}_{ACB})$(用定义 10 消去点 P)

$=\frac{1}{2}\left(\overline{S}_{EAAC}+\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot|\overline{BC}|\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}P_{ACBA}+\overline{S}_{AAAC}+\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot|\overline{BC}|\right)$(用消点法 15* 消去点 E)

$=\frac{1}{2}(|\overline{AC}|^2-t|\overline{AC}|^2)$(由定义消去点 B)

$=\frac{1}{4}(1-t)|\overline{AC}|^2$。

代入要证结论的左端,命题得证。

消去圆上的点

圆的引进使平面几何的题目变得更加生动活泼、丰富多彩,但也增加了解题的难度。我们首先介绍消去共圆点的方法。

下面介绍圆周角定理(在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等,且等于该弧所对圆心角的一半)的一些推论。

命题 9　已知$\triangle ABC$ 的两边 $BC=a$,$AC=b$ 及 AB 上的高 $CD=h$,记$\triangle ABC$ 外接圆直径为 d。

求证:$d=\frac{ab}{h}$。

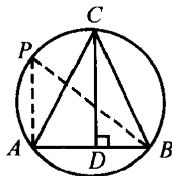


图 7-39

证明　如图 7-39,过 B 作$\triangle ABC$ 的外接圆的直径 BP,若 P 与 A 重合,要证的结论显然成立。若不然,由 BP

是直径，知$\angle PAB$是直角，又由圆周角定理知$\angle APB$与$\angle ACB$相等或互补，由共角定理，得

$$\frac{AP \cdot PB}{AC \cdot CB}=\frac{S_{APB}}{S_{ACB}}=\frac{AB \cdot AP}{CD \cdot AB}。$$

所以 $BP=\dfrac{BC \cdot AC}{CD}$。

即　$d=\dfrac{ab}{h}$。

命题 9　(三角形外接圆直径公式)设已知$\triangle ABC$三边a、b、c及面积，则其外接圆直径为$d=\dfrac{abc}{2S_{ABC}}$。

分析　由$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}ch$，得$h=\dfrac{2S_{ABC}}{c}$，代入命题 9 的公式$d=\dfrac{ab}{h}$，即得证。

于是有

命题 10　(共圆定理)若$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的外接圆相同或相等，则

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'}。$$

这里的共圆定理只涉及普通面积，还不涉及带符号面积，为了导出关于三角形带符号面积的共圆定理，需要引入有向弦的概念。

在圆上任意取参考点J，我们相对于点J可以规定此圆上的有向弦(带符号)长度如下。

(1) 圆上任两点P、Q确定有向弦PQ与有向弦QP，分别记为$\hat{PQ}$和$\hat{QP}$。$\hat{PQ}$和$\hat{QP}$的值是实数，满足$\hat{PQ}=-\hat{QP}$，其绝对值等于线段PQ的长，当P、Q重合时，$\hat{PQ}=0$。

(2) 对圆上任一点P，约定$\hat{JP}\geqslant 0$，具体地，$\hat{JP}$等于线段

JP 之长。

(3) 对圆上任两点 P、Q，$\hat{PQ}$与$\overline{S}_{JPQ}$符号相同。具体地，当 $J—P—Q$ 按逆时针方向绕行时，$\hat{PQ}$非负，反之，$\hat{PQ}$非正。

根据以上约定，可把命题 9 和命题 10 推广到带符号面积和有向弦的情形。

命题 9* (一般的直径公式)设 d 为$\triangle ABC$ 外接圆的直径，则

$$d=\frac{\hat{AB}\cdot\hat{BC}\cdot\hat{AC}}{2\overline{S}_{ABC}}。$$

要证明这个等式，只需检验一下其右端分子和分母是否有相同的符号。

首先，当 A、B、C 中相邻两字母对换时，分子、分母同时变号，故我们对 A、B、C 的某一特殊顺序证明就够了。不失一般性，设 $A—B—C$ 沿圆周按逆时针方向绕行，并设参考点 J 在$\angle ABC$ 所对的弧上，则$\overline{S}_{JAB}$、$\overline{S}_{JBC}$、$\overline{S}_{JAC}$均非负，故$\hat{AB}$、$\hat{BC}$、$\hat{AC}$均非负，$\overline{S}_{ABC}$也非负，这就完成了证明。

命题 10* (一般的共圆定理)设$\triangle ABC$ 与$\triangle XYZ$ 内接于同圆或等圆，则

$$\frac{\overline{S}_{ABC}}{\overline{S}_{XYZ}}=\frac{\hat{AB}\cdot\hat{BC}\cdot\hat{AC}}{\hat{XY}\cdot\hat{YZ}\cdot\hat{XZ}}=\frac{\hat{AB}\cdot\hat{BC}\cdot\hat{CA}}{\hat{XY}\cdot\hat{YZ}\cdot\hat{ZX}}。$$

今后，提到直径公式和共圆定理时，若涉及带符号面积，则指命题 9* 与命题 10*，下面的例题说明如何把消点法与这里的几个命题结合起来解决涉及多点共圆的问题。

例 30 已知 A、B、C、D 四点共圆，弦 AB 与 CD 交于 P。求证：$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$。

作图　(1) 在一圆上任取 A、B、C、D 四点。

(2) 取直线 AB、CD 的交点 P。如图 7-40。

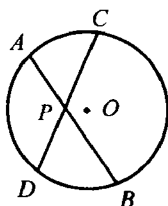


图 7-40

要证明的结论可表示为 $P_{APB}=P_{CPD}$，先消去点 P，再应用共圆定理即可。

证明　$\dfrac{P_{APB}}{P_{CPD}}=\dfrac{\overline{S}_{CAD}\cdot\overline{S}_{DBC}\cdot\overline{AB}^2}{\overline{S}_{ACB}\cdot\overline{S}_{BCA}\cdot\overline{CD}^2}$

(用消点法 13 消去点 P)

$$=\frac{\overset{\wedge}{CA}\cdot\overset{\wedge}{CD}\cdot\overset{\wedge}{AD}\cdot\overset{\wedge}{DB}\cdot\overset{\wedge}{DC}\cdot\overset{\wedge}{BC}\cdot\overline{AB}^2}{\overset{\wedge}{AC}\cdot\overset{\wedge}{AB}\cdot\overset{\wedge}{BC}\cdot\overset{\wedge}{BA}\cdot\overset{\wedge}{BD}\cdot\overset{\wedge}{DA}\cdot\overline{CD}^2}。$$

(用共圆定理)

例 31　设 A、B、C、D 是圆上四点，O 是圆心，Q 是 BC 中点，S 为 AD 中点，J 为 SQ 中点，将边 OJ 延长至 M，使 $\overline{JM}=\overline{OJ}$，如图 7-41。

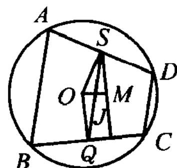


图 7-41

求证：$SM\perp BC$。

题目中将作图步骤交代得很清楚，所要证明的结论可表示为

$P_{SBMC}=0$。

证明　$P_{SBMC}=P_{CBS}-P_{CBM}$　(按定义)

$=P_{CBS}-(2P_{CBJ}-P_{CBO})$　(消去点 M)

$=P_{CBS}-2\left(\dfrac{1}{2}P_{CBS}+\dfrac{1}{2}P_{CBQ}\right)+P_{CBO}$　(消去点 J)

$=P_{CBO}-P_{CBQ}$(化简)

$$=P_{CBO}-\frac{1}{2}(P_{CBB}-P_{CBC}) \quad (\text{消去点 } Q)$$

$$=\overline{CB}^2+\overline{BO}^2-\overline{CO}^2-\frac{1}{2}(\overline{CB}^2+\overline{BC}^2)$$

$$=0。$$

实际上，在消去点 J 之后便可看出 $P_{CBO}-P_{CBQ}=0$。

$P_{CBO}=\overline{CB}^2+\overline{BO}^2-\overline{CO}^2=\overline{CB}^2$。

$P_{CBQ}=\overline{CB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{CQ}^2=\overline{CB}^2$。

例 32　设 A、B、C、D 是圆 O 上四点，过 A 作 AB 的垂线交直线 CD 于 A_1，过 C 作 CD 的垂线交直线 AB 于 C_1。如图 7-42。

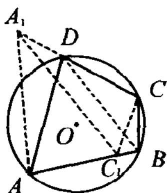


图 7-42

求证：$A_1C_1 /\!/ BD$。

证明　要证的结论可以表示为

$$\overline{S}_{BDA_1}=\overline{S}_{BDC_1} \quad 即 \frac{\overline{S}_{BDA_1}}{\overline{S}_{BDC_1}}=1。$$

$$\frac{\overline{S}_{BDA_1}}{\overline{S}_{BDC_1}}=\frac{\overline{S}_{BDA_1}\cdot P_{BCAD}}{P_{BCD}\cdot \overline{S}_{ABD}} \quad (\text{用消点法12消去点}C_1)$$

$$=\frac{-P_{BAD}\cdot \overline{S}_{BCD}\cdot P_{BCAD}}{P_{BCD}\cdot \overline{S}_{ABD}\cdot P_{BCAD}} \quad (\text{用消点法12消去点}A_1)$$

$$=-\left(-\frac{AB\cdot AD}{BC\cdot D}\right)\cdot\frac{\hat{BC}\cdot\hat{CD}\cdot\hat{BD}}{\hat{AB}\cdot\hat{BD}\cdot\hat{AD}}$$

(由勾股差定理，共圆定理)

$$=1。$$

命题得证。

下面讨论消去圆和直线的交点以及两圆的交点。

命题 11　设 P 是圆 O 上一点，直线 AP 与圆 O 交于另

一点 Q，如图 7-43，则

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}=\frac{2P_{OPA}}{P_{APA}},$$

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{PA}}=1-\frac{2P_{OPA}}{2P_{APA}}=\frac{2(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)}{P_{APA}},$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\frac{2P_{OPA}}{2P_{OPA}-P_{APA}}。$$

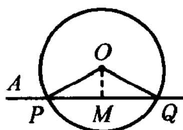


图 7-43

证明　如图 7-43，记 M 为 PQ 的中点，则 $OM\perp AP$，故

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}=\frac{2\overline{PM}}{\overline{PA}}=\frac{2\overline{PM}\cdot\overline{PA}}{\overline{PA}\cdot\overline{PA}}=\frac{2P_{OPA}}{P_{APA}}。$$

另外两个等式显然可由此推出。

于是，可得出如下的消点法：

消点法 16　（从共线线段比中消去圆与直线的一个交点，简称 RCL）设直线 AP 与过点 P 的圆 O 交于不同于 P 的另一点 X，则

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{PA}}=\frac{2P_{OPA}}{P_{APA}}。$$

消点法 17　（从带符号面积中消去圆与直线的一个交点，简称 SCL）设直线 AP 与过点 P 的圆 O 交于不同于点 P 的另一点 X，则对任意三点 U、V、W，有

$$\overline{S}_{XUWV}=\frac{2P_{OPA}}{P_{APA}}\cdot\overline{S}_{AUWV}+\frac{2(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)}{P_{APA}}\cdot\overline{S}_{PUWV}。$$

这只要把消点法 16 与消点法 3 结合起来就行了。类似地把消点法 16 与消点法 10 结合起来，得到

消点法 18　（从勾股差中消去圆与直线的一个交点，简称 PCL）设直线 AP 与过点 P 的圆 O 交于不同于点 P 的另一点 X，则对任三点 U、V、W，有

(1) $P_{XUWV}=\frac{2P_{OPA}}{P_{APA}}\cdot P_{AUWV}+\frac{2(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)}{P_{APA}}\cdot P_{PUWV}$。

(2) $P_{UXXV}=\frac{2P_{OPA}}{P_{APA}}\cdot P_{UAAV}+\frac{2(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)}{P_{APA}}\cdot P_{UPPV}$

$$-4P_{OPA}\cdot\frac{(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)}{P_{APA}}。$$

关于消去两圆交点的方法，可分两步走，如图 7-44，已知两圆圆心 A、B 和一个交点 P，过点 P 作 AB 的垂线，得垂足 M，再延长 PM 至 X，使得 $\overline{XM}=\overline{MP}$，则 X 是圆 A 和圆 B 的另一交点。

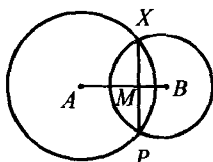


图 7-44

这样，因为已知 $\frac{\overline{MX}}{\overline{MP}}=-1$，故可用消点法 3 或消点法 10 消去点 X。又由 $PM\perp AB$，可用消点法 9、11 或 12 消去点 M，两步结合起来就得

消点法 19 （从带符号面积中消去两圆的交点之一，简称 SCC）已知两圆圆心 A、B 和它们的一个交点 P，设另一交点为 X，则对任意三点 U、V、W，有

$$\overline{S}_{XUWV}=\frac{P_{PAB}\cdot\overline{S}_{BUWV}+P_{PBA}\cdot\overline{S}_{AUWV}}{\overline{AB}^2}-\overline{S}_{PUWV}。$$

证明 设直线 AB 与 PX 交于点 M，则 M 是 PX 的中点。故由消点法 3，得

$$\overline{S}_{MUWV}=\frac{1}{2}(\overline{S}_{XUWV}+\overline{S}_{PUWV})。$$

又由于有 $PM\perp AB$，由消点法 12，得

$$\overline{S}_{MUWV}=\frac{P_{PAB}\cdot\overline{S}_{BUWV}+P_{PBA}\cdot\overline{S}_{AUWV}}{2\ \overline{AB}^2}。$$

比较两式，得

$$\frac{P_{PAB}\cdot\overline{S}_{BUWV}+P_{PBA}\cdot\overline{S}_{AUWV}}{\overline{AB}^2}=\overline{S}_{XUWV}+\overline{S}_{PUWV}。$$

由此可解出$\overline{S}_{XUWV}$，从而证得所要证的结论。

消点法 20 （从勾股差中消去两圆的交点之一，简称PCC）已知两圆圆心 A、B 和它们的一个交点 P，设另一交点为 X，则对任意三点 U、V、W，有

(1) $$P_{XUWV}=\frac{P_{PAB}\cdot P_{BUWV}+P_{PBA}\cdot P_{AUWV}}{\overline{AB}^2}-P_{PUWV}。$$

(2) $$P_{UXXV}=\frac{P_{PAB}\cdot P_{UBBV}+P_{PBA}\cdot P_{UAAV}}{\overline{AB}^2}-P_{UPPV}$$

$$-3\overline{AB}^2+2\left(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2\right)+\frac{\left(\overline{PA}^2-\overline{PB}^2\right)^2}{\overline{AB}^2}。$$

证明　等式(1)证明同消点法 19。

为了证明等式(2)，仍记 M 为 AB 与 PX 的交点，由 M 是 PX 的中点，得

$$P_{UXXV}=2P_{UMMV}-P_{UPPV}+4\overline{MP}^2。$$

再由消点法 11 得

$$\overline{MP}^2=\frac{P_{PAB}\cdot\overline{BP}^2+P_{PBA}\cdot\overline{AP}^2}{2\overline{AB}^2}-\frac{P_{PAB}\cdot P_{PBA}}{2\overline{AB}^2},$$

$$P_{UMMV}=\frac{P_{PAB}\cdot P_{UBBV}+P_{PBA}\cdot P_{UAAV}}{2\overline{AB}^2}-\frac{P_{PAB}\cdot P_{PBA}}{2\overline{AB}^2}。$$

代入前式，得

$$P_{UXXU}=\frac{P_{PAB}\cdot P_{UBBV}+P_{PBA}\cdot P_{UAAV}}{\overline{AB}^2}-P_{UPPV}-\frac{P_{PAB}\cdot P_{PBA}}{\overline{AB}^2}$$

$$+\frac{2\left(P_{PAB}\cdot\overline{BP}^2+P_{PBA}\cdot\overline{AP}^2\right)}{\overline{AB}^2}-\frac{2P_{PAB}\cdot P_{PBA}}{\overline{AB}^2}$$

$$=\frac{P_{PAB}\cdot P_{UBBV}+P_{PBA}\cdot P_{UAAV}}{\overline{AB}^2}-P_{UPPV}-3\ \overline{AB}^2$$

$$+2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)+\frac{(\overline{PA}^2-\overline{PB}^2)^2}{\overline{AB}^2}。$$

例 33　在△ABC 中，$AC=AB$。在直线 BC 上任取一点 D，直线 AD 与△ABC 的外接圆交于 E。(如图 7-45)。

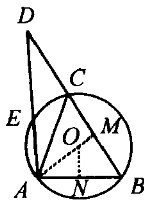


图 7-45

求证：$\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AE}$。

作图　(1) 任取不同两点 B、M。

(2) 过 M 作 BM 的垂线，在垂线上取一点 A。

(3) 取 AB 中点 N。

(4) 过 N 作 AB 的垂直平分线与 AM 交于 O。

(5) 延长 BM 至 C，使$\overline{BM}=\overline{MC}$。

(6) 在直线 BC 上任取一点 D。

(7) 直线 AD 与过 A 点的圆 O 交于 E。

要证明的是$\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AE}$，即 $P_{BAB}=P_{DAE}$。

证明　$\dfrac{P_{DAE}}{P_{BAB}}=\dfrac{2P_{OAD}\cdot P_{ADA}}{P_{BAB}\cdot P_{ADA}}$　(用消点法 18 消去点 E)

$=\dfrac{2P_{OAB}}{P_{BAB}}$　(化简，由 $AO\perp BD$ 消去点 D)

$=\dfrac{P_{BAB}}{P_{BAB}}=1$。　(由 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$)

在本章中共介绍了张景中院士所创立的消点算法 20 种。这主要是为了解决较难的几何题用的。而解中学数学中的一般几何问题时，都只用到它们的一些特殊情况，所以在解题过程中一定要灵活运用。

举例能证明几何定理吗

几千年来，人们已经形成了一个传统看法，要肯定一个数学命题，只有通过演绎的证明，才能让人信服。如果说你通过度量的方法去检验几个三角形后，就得出三角形的内角和是180°的结论，那简直让人笑掉牙。人们会问，你测量的只是几个或几十个三角形，而三角形有千千万万个，你怎能就断定所有三角形的内角和都是180°呢？这种从大量事例中寻找一般的归纳推理方法，是人类认识自然的基本方法之一，对于其他学科是行之有效的方法。但是到了数学就不适用了，发现归发现，证明归证明，在数学上发现不能代替证明。一个数学命题正确与否，只有通过严密的证明才能得

到证实，而举几个例子是算不得证明的。

近年来，我国数学家提出了与这种传统看法大相径庭的见解，他们的研究表明：要肯定或否定一条初等几何命题，只要检验若干个数值实例就可以了，至于要检验多少例子，则可以根据命题的“复杂”程度能具体估算出来。检验时要计算，计算有误差怎么办？研究表明，只要误差不超过某个界限就行。而这个界限，也可以根据命题的“复杂”程度来确定。

这种用举例来证明几何定理的方法，我国数学家创立了以下三种：

（1）单点例证法。亦称例证法，这是洪加威在 1986 年提出来的。对于一类平面几何定理，只要按照一种简单的规则去举例，并且对这个具体的数值例子计算（或作图）到一定精确程度，就完全可以用来精确地判定一个一般的几何命题。这就是例证法。例证法的原理适用于更广泛的范围，但洪加威所设想的算法太复杂，迄今未能在计算机上实现。

（2）数值并行法。几乎与洪加威同时，张景中、杨路提出了数值并行算法，其基本思想是：具有某种一般性的大量实例可以证明一个一般的几何命题；用数值计算代替符号计算，以减少内存消耗；用并行处理取代串行处理，以缩短时间。这是第一个具有实验意义的数值方法。据此，他们还编制了“L 类几何定理的证明器”，并且在计算机上证明了一些颇不平凡的定理，他们还用此方法来检验人们提出的某些猜想，从而发现了若干有趣的新定理。

（3）单例实验法。在张景中、杨路的指导下，侯晓荣又发展了一种效率更高、实用性强的数值方法，称为单例实验法。它第一次表明在一定意义下不准确的浮点运算可以用来作严格的推理，具有实验的性质，真正全面地实现了例证法的美妙

设想。

上面提到的三种举例证明几何定理的机器证明方法中，数值并行法和单例实验法已经在计算机上实现了。它们的基本思想是很平凡的。

下面我们通过一个简单的例子来说明例证法：

要证明恒等式

$$(x+1)(x-1)=x^2-1, \tag{1}$$

可通过将左端展开，合并同类项，比较两端同类项系数，便知分晓。

但是也可以用数值实验的方法证明：取 $x=0$，两端都是 -1；取 $x=1$，两端都是 0；取 $x=2$，两端都是 3。这就证明了(1)是恒等式。我们可以用反证法证明这一事实。如果它不是恒等式，那它就是一个不高于二次的一元代数方程。这个方程至多有两个根，而现在已有 $x=0,1,2$ 这三个根了，这表明它不是方程而是恒等式。

这一结果可以推广到高次情形，便是：

命题 A　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是不超过 n 次的多项式，如果有 $n+1$ 个不同的数 a_0、a_1……a_n，使得 $f(a_k)=g(a_k)$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$，则等式

$$f(x)=g(x) \tag{2}$$

是恒等式。

这就是说，要问一个单变量的不高于 n 次的一元代数等式是不是恒等式，只要用有限个数值代入检验，也就是举有限个例子就可以作出判定。那么，要举多少例子？这要看代数式的次数，如果次数不超过 n，则只要举 $n+1$ 个例子就够了。其基本依据是一元 n 次方程至多有 n 个根。

现在换一个角度看等式(1)，只要取一个较大的 x 值，比

如 $x=6$ 就能证明(1)式是恒等式，这能行吗？在(1)式中，左端展开后最多有4项，每项系数的绝对值至多为1。整理合并之后，系数的绝对值是不大于5的正整数或0。如果(1)不是恒等式，把它整理后应当是一个方程，即

$$ax^2+bx+c=0。$$

这里 a、b、c 不全为0，都是绝对值不大于5的整数。如果取 $x=6$，有

$$a\times 6^2+b\times 6+c=0。$$

可知 $a=b=c=0$。

若 $a=0$，由 $6b+c$ 得 $6|b|=|c|$。当 $b=0$ 时，有 $c=0$；当 $b\neq 0$ 时，得 $|c|=6|b|\geqslant 6$，这与 $|c|\leqslant 5$ 矛盾。

若 $a\neq 0$，由 $36a+6b+c=0$，得 $36|a|\leqslant 6|b|+|c|$，即

$$36|a|\leqslant 6|b|+|c|\leqslant 35。$$

仍然矛盾，这就证明了(1)式是恒等式。

这种办法也可以推广到高次情形，具体地有：

命题 B　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是不超过 n 次的多项式，如果知道 $f(x)-g(x)$ 的标准展开式中系数绝对值最大者不大于 L，非零系数绝对值不小于 $S(>0)$。设

$$|\hat{x}|=P>\frac{L}{S}+2,$$

则

$$S\leqslant|f(\hat{x})-g(\hat{x})|\leqslant SP^{n+1}。\tag{3}$$

证明　设

$$f(x)-g(x)=c_0x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_k,$$

其中 $0\leqslant k\leqslant n$，而 $c_0\neq 0$。

若 $k=0$，显然有(3)式成立。以下设 $1\leqslant k\leqslant n$，这时

$$|f(\hat{x})-g(\hat{x})|\geqslant|c_0x^k|-|c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\cdots+c_k|$$

$$\geqslant SP^k - L(P^{k-1}+P^{k-2}+\cdots+P+1)$$

$$\geqslant \frac{SP^k}{P-1}\left[P-1-\frac{L}{S}\left(1-\frac{1}{P^k}\right)\right]$$

$$\geqslant S\left(P-1-\frac{L}{S}\right)\geqslant S。$$

另一方面，显然有 $|f(\hat{x})-g(\hat{x})|\leqslant L\,\dfrac{P^{n+1}-1}{P-1}\leqslant SP^{n+1}$。

不等式(3)表明，对 $|\hat{x}|\geqslant \dfrac{L}{S}+2$，$\hat{x}$ 不可能是方程 $f(x)-g(x)=0$ 的根。如果计算居然有 $f(\hat{x})=g(\hat{x})$，则可断言 $f(\hat{x})=g(\hat{x})$ 是恒等式。

这就是说，举一个足够大的数值例子，即可证明一元代数恒等式。其基本依据是：代数方程的根的绝对值，不超过其绝对值最大的系数与最高次系数绝对值之比加 1（命题 B 采用了略强的条件，是为了得到不等式(3)中确定的正的下界）。

另一个特别的尝试是取 $x=\sqrt[3]{2}$，如果它使得多项式

$$(x+1)(x-1)-x^2+1$$

取值为 0，则可以断定该多项式是零多项式，原因是多项式 x^3-2 在有理数域上是不可约的，所以它的根 $\sqrt[3]{2}$ 不可能是一个次数低于 3 的非零整系数多项式的根。

这种方法推广到高次情形是：

命题 C 设 $f\left(p^{\frac{1}{n+1}}\right)=g\left(p^{\frac{1}{n+1}}\right)$，则等式

$$f(x)=g(x)$$

是恒等式。

从以上所说的命题 A、命题 B 和命题 C 出发，发展成几何定理的机器证明的数值并行法、例证法和单例实验法，需要更进一步的工作。

首先要做的是从一元推广到多元情形，下面只列出结果

不给予证明。

命题 A 推广到多个变量的情形是：

定理 A　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$是 x_1、x_2……x_k 的多项式，它关于 x_i 的次数不大于 n_i，对应于 $r=1, 2, \cdots, k$，取数值 $u_{r,s}(s=0,1,\cdots,n_r)$，使得 $s_1\neq s_2$ 时，有 $u_{r,s_1}\neq u_{r,s_2}$。如果对任一组$(s_1,s_2,\cdots,s_k)$，其中 $0\leqslant s_i\leqslant n_i$，有

$$f\left(u_{1,s_1},u_{2,s_2},\cdots,u_{k,s_k}\right)=0, \tag{1}$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$是恒为 0 的多项式。

对于定理 A 所提供的检验方法，首先要估计 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$关于各个变量 x_1、x_2……x_k 的次数的上界。我们遇到的多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$通常是没有经过整理的，如果整理好了，一眼便看得出是不是恒等于零，那就不用检验了。既然没有整理好，它关于各个变量是多少次也不是一望而知的，所以要估计。

第二步是确定用哪些数值代入检验。这时，已估计好了 x_i 的次数不超过 n_i，那就让 x_i 这个变元取 n_i+1 个不同的值，这 n_i+1 个不同的值 $u_{i,0}$、$u_{i,1}$……u_{i,n_i}组成有限集 A_i，$i=1,2,\cdots,k$。从 A_1、A_2……A_k 中各取一个值：从 A_1 中取 x_1 的一个值，从 A_2 中取 x_2 的一个值……从 A_k 中取 x_k 的一个值，这样便凑出一组$(x_1,x_2,\cdots,x_k)$的值。因 A_k 中有 n_i+1 个数，所以一共可凑出$(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$个数组来。这些数值构成的集合，叫做规模为$(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$的一个格阵。

最后，将格阵中每组值代入 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$加以检验，若有一组值代进去便有 $f\neq 0$，那么当然不会有 f 恒为零。若每一组值都使 $f=0$，便证明了 f 恒等于零。

比如，要检验等式

$$(x+y)(x-y)-x^2-y^2=0$$

是不是恒等式，首先看出它关于变量 x、y 的次数都不超过 2，故要在 $(2+1)\times(2+1)=3\times3$ 的格阵上检验。可取 $x=0,1,2$ 和 $y=0,1,2$ 得到格阵中的 9 组数值 $(0,0)$，$(0,1)$，$(0,2)$，$(1,0)$，$(1,1)$，$(1,2)$，$(2,0)$，$(2,1)$，$(2,2)$，分别代入检验即可，即只要举 9 个例就可以证明此题。

一般说来，在定理 A 的条件下，需要验算的变元数值共有 $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$ 组。

命题 B 推广到多个变量的情形是：

定理 B　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 是 x_1、x_2……x_k 的多项式，它关于 x_i 的次数不大于 n_i，$1\leqslant i\leqslant k$，又设在它的标准展开式中系数绝对值最大者不大于 L，非零系数绝对值最小者不小于 $S>0$，如果变元的一组值 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$……$\hat{x}_k$ 满足

$$\begin{cases}|\hat{x}_1|=p_1\geqslant\dfrac{L}{S}+2,\\ |\hat{x}_2|=p_2\geqslant p_1^{n_1+1}+2,\\ |\hat{x}_3|=p_3\geqslant p_2^{n_2+1}+2,\\ \cdots\cdots\\ |\hat{x}_k|=p_k\geqslant p_{k-1}^{n_k+1}+2。\end{cases}$$

则有

$$f(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_k)\geqslant S\geqslant0。$$

类似地，命题 C 也可以推广到多元情形：

定理 C　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 是 x_1、x_2……x_k 的多项式，它关于 x_k 的次数不大于 n_i，又 P_1、P_2……P_k 是 k 个互不相同的素数，如果

$$f\left(P_1^{\frac{1}{n_1+1}},P_2^{\frac{1}{n_2+1}},\cdots,P_k^{\frac{1}{n_k+1}}\right)=0,$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$是恒为 0 的多项式。

到目前为止，我们只说明了通过验算一个或一些例子就可以检验一个代数等式是不是恒等式，这和大家感兴趣的几何定理的机器证明仍有相当大的距离。

通常初等几何中的定理，如果在假设和结论中不涉及不等式，总可以用坐标法化成这样的问题：已知有一些代数等式，求证某一代数等式成立。

下面我们先举一个简单的例子，看看怎样举例子证明几何命题。

例　试证：任意三角形内角和为 180°。

首先把几何定理问题代数化。设三角形 ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(0,0)$、$B(1,0)$、$C(u_1,u_2)$，这就是取 A 为直角坐标系原点，AB 所在直线取作 x 轴，边 AB 取成长度单位。

证明三个内角和为 180°，可以通过把三个角拼在一起，看它们是否成为一个平角。如图 8-1，取 BC 的中点 M，延长 AM 至 D 使 $DM=AM$，则

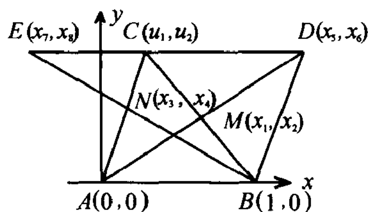


图 8-1

$\angle DCB=\angle CBA$，又取 AC 的中点 N，延长 BN 至 E，使 $NE=NB$，则$\angle ECA=\angle CAB$。于是要证的命题为

$$\angle ECA+\angle ACB+\angle DCB=180°,$$

也就是要证 D、C、E 三点共线。

设 $M(x_1,x_2)$、$N(x_3,x_4)$、$D(x_5,x_6)$、$E(x_7,x_8)$，则假设条件为：

$$
H:\begin{cases}
f_1=x_1-\dfrac{u_1+1}{2}=0, \\
f_2=x_2-\dfrac{1}{2}u_2=0, & (M\text{ 是 }BC\text{ 的中点}) \\
f_3=x_3-\dfrac{1}{2}u_1=0, \\
f_4=x_4-\dfrac{1}{2}u_2=0, & (N\text{ 是 }AC\text{ 的中点}) \\
f_5=x_5-2x_1=0, \\
f_6=x_6-2x_2=0, & (M\text{ 是 }AD\text{ 的中点}) \\
f_7=x_7-2x_3+1=0, \\
f_8=x_8-2x_4=0。 & (N\text{ 是 }BE\text{ 的中点})
\end{cases}
$$

而要证明的结论是 D、C、E 三点共线，即

$$G:\ g=(x_5-u_1)(x_8-u_2)-(x_7-u_1)(x_6-u_2)=0。$$

其中 u_1、u_2 为自由变元，一旦 u_1、u_2 定了，x_1、x_2……x_8 是由假设条件 H 限制的约束变元，利用条件 H 解出 x_1、x_2……x_8 代入 g，可得关于 u_1、u_2 的多项式 $g(u_1,u_2)$。要证明在条件 H 下有结论 G，也就是要证明 $g(u_1,u_2)$ 恒等于零。不具体计算，也可以看出 g 关于 u_1、u_2 的次数都不超过 1，于是只要在变元 u_1、u_2 的一个 2×2 的格阵上检验 g 是否为 0 即可，这个格阵可取(0,0)，(0,1)，(1,0)，(1,1)。对(0,0)，(1,0)根本不用算，因为这时 A、B、C 三点共线，结论显然成立，而在(1,1)与(0,1)这两种情形下得到三角形 ABC 是全等的，因而只要对(0,1)作检验就够了。把 $u_1=0$，$u_2=1$ 代入条件 H 得 $x_8=1$，$x_6=1$，$x_7=-1$，$x_5=1$。代入 G 即得 $g=0$，这就完成了命题的证明。

这表明，只要检验四个三角形(实质上是一个)，举四个例子(实质上是一个)便足以证明三角形内角和等于 180°。

从上面的例子可以看到，要证明定理“三角形内角和等于

180°”时，只要举一个例子就可以证明此定理。但有些几何命题就需要举大量的例子才能证明。例如

命题 四面体的四个高 h_1、h_2、h_3、h_4 和它们三个宽度 w_1、w_2、w_3 之间有关系：

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{w_1^2}+\frac{1}{w_2^2}+\frac{1}{w_3^2}。$$

这里，四面体的宽度是指它们一对不相交的棱之间的距离。

上面的命题，要用 14 万个例子来检验，也就是说要举 14 万个例子才能证明该命题，这在计算机上算要好几小时。

[General Information]
书名=平面几何定理的机器证明
作者=孙熙椿著
页数=142
SS号=11594264
DX号=
出版日期=1999年12月第1版
出版社=文本教育出版社